京都大学　1970 年　入学試験　文系数学　問題 4

問題

次の 6 つの条件をみたす x, y, z のうち，z を最小にする x, y, z の値を求めよ．

$$a > 2, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1, \quad x > 1, \quad 1 < z < 2, \quad xz \geqq a, \quad yz \geqq 2$$

解答

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ より
$\frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$
$x > 1$ より $x - 1 > 0$ よって
$y = \frac{x}{x-1}$
$yz \geqq 2$ より
$\frac{x}{x-1}z \geqq 2$
$x > 1, x - 1 > 0$ より
$z \geqq \frac{2(x-1)}{x}$
$xz \geqq a$,$x > 1$ より
$z \geqq \frac{a}{x}$
$a \geqq 2(x-1)$ の範囲、つまり $1 < x \leqq \frac{a}{2} + 1$ では
$z \geqq \frac{a}{x}$
$x > 0$ の範囲で $\frac{a}{x}$ は単調減少なのでこの区間 $(1, \frac{a}{2} + 1]$ において z は $x = \frac{a}{2} + 1$ の点で最小となる。
また $x > \frac{a}{2} + 1$ では
$z \geqq \frac{2(x-1)}{x} = 2 - \frac{2}{x}$
$2 - \frac{2}{x}$ は単調増加なので、z は $x = \frac{a}{2} + 1$ の点で最小となる。
よって x の全区間において z は $x = \frac{a}{2} + 1$ の点で最小となる

$$x = \frac{a}{2} + 1$$

そのときの z の値は

$$z = \frac{a}{\frac{a}{2} + 1} = \frac{2a}{a+2}$$

そのときの y の値は

$$y = \frac{x}{x-1} = \frac{\frac{a}{2} + 1}{\frac{a}{2}} = \frac{a+2}{a}$$

よってまとめると

$$x = \frac{a}{2} + 1, y = \frac{a+2}{a}, z = \frac{2a}{a+2}$$