京都大学　1970 年　入学試験　文系数学　問題 5

問題

点 (a, b) は直線 $y = 2x - 2$ の上にある．直線 $y = 2ax - b$ と放物線 $y = x^2$ との囲む部分の面積を求めよ．また，この面積を最小にする a の値を定めよ．

解答

(a, b) は $y = 2x - 2$ を満たすので、
$b = 2a - 2$
したがって、直線の式は
$y = 2ax - b = 2ax - 2a + 2$
放物線と直線の囲む面積は

$$y = x^2 - 2ax + 2a - 2 \tag{1}$$

が x 軸と囲む面積に等しい
(1) と x 軸の交点の x 座標は
$x^2 - 2ax + 2a - 2 = 0$ の解なので
その解を $x_1, x_2 \quad (x_1 < x_2)$ とすると
$x_1 = a - \sqrt{a^2 - 2a + 2}$
$x_2 = a + \sqrt{a^2 - 2a + 2}$
またこの解は $x^2 = 2ax - 2a + 2$ を満たす

その面積 $S(a)$ は

$$S(a) = \int_{x_1}^{x_2} x^2 - 2ax + 2a - 2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - ax^2 + (2a - 2)x + C \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\begin{aligned}
S(a) &= \frac{x_2^3}{3} - ax_2^2 + (2a - 2)x_2 - \frac{x_1^3}{3} + ax_1^2 - (2a - 2)x_1 \\
&= \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} - a(x_2^2 - x_1^2) + (2a - 2)(x_2 - x_1) \\
&= (x_2 - x_1)\left(\frac{x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2}{3} - a(x_2 + x_1) + (2a - 2) \right) \\
&= (x_2 - x_1)\frac{2ax_2 - 2a + 2 + x_2x_1 + 2ax_1 - 2a + 2 - 3a(x_2 + x_1) + 3(2a - 2)}{3} \\
&= (x_2 - x_1)\frac{x_2x_1 - ax_2 - ax_1 + 2a - 2}{3}
\end{aligned}$$

x_1, x_2 を代入すると

$$
\begin{aligned}
3S(a) &= (a+\sqrt{a^2-2a+2}-(a-\sqrt{a^2-2a+2})) \\
&\quad ((a+\sqrt{a^2-2a+2})(a-\sqrt{a^2-2a+2}) \\
&\quad -a(a+\sqrt{a^2-2a+2})-a(a-\sqrt{a^2-2a+2})+2a-2) \\
&= (2\sqrt{a^2-2a+2}) \\
&\quad ((a^2-(a^2-2a+2)) \\
&\quad -a^2-a\sqrt{a^2-2a+2}-a^2+a\sqrt{a^2-2a+2}+2a-2) \\
&= (2\sqrt{a^2-2a+2}) \\
&\quad (a^2-a^2+2a-2-2a^2+2a-2) \\
&= (2\sqrt{a^2-2a+2})(-2a^2+4a-4) \\
&= (2\sqrt{a^2-2a+2})(-2(a^2-2a+2)) \\
&= -4\sqrt{a^2-2a+2}(a^2-2a+2)
\end{aligned}
$$

$a^2-2a+2>0$ より $\sqrt{a^2-2a+2}$ は実数

x 軸の下の部分を計算したので面積が負になっているが、面積は正なので

$$S(a)=\frac{4}{3}\sqrt{a^2-2a+2}(a^2-2a+2)$$

この値が最小になるのは a^2-2a+2 が最小になるときなので

$f(x)=x^2-2x+2$ として

２次の係数が１の二次式は、下に凸なので、極値で最小値をとる。

したがって、$f'(x)=0$ の点で最小となる。

$f'(x)=2x-2=0$ より

$x=1$

よって、$S(a)$ が最小となるのは

$$a=1$$