京都大学　1970 年　入学試験　文系数学　問題 6

問題

a は $1 < a < 2$ をみたす定数とする．

$$x_1 = a, \qquad x_{n+1} = \frac{{x_n}^2 + 2}{3}$$

によって定められた数列 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，$\cdots$ について，次の各式を証明せよ．

1. $1 < x_n < a$（$n = 2$，3，$\cdots$）
2. $x_n - 1 \leqq \left(\dfrac{a+1}{3}\right)(x_{n-1} - 1)$（$n = 2$，$3$，$\cdots$）
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

解答

(1)

x_2 について確認する。

$1 < a < 2$ なので

$\dfrac{1+2}{3} = 1 < x_2 = \dfrac{a^2+2}{3}$ $x_2 - x_1 = \dfrac{a^2+2}{3} - a = \dfrac{a^2 - 3a + 2}{3} = \dfrac{(a-2)(a-1)}{3}$

$1 < a < 2$ より $(a-2) < 0, (a-1) > 0$

よって $x_2 - x_1 < 0$ 以上より $1 < x_2 < a$

$1 < x_n < a$ が成立していると仮定する

$x_n > 1$ ならば

$x_{n+1} = \dfrac{{x_n}^2 + 2}{3} > \dfrac{1^2 + 2}{3} = 1$

よって $x_{n+1} > 1$

帰納法より $x_n > 1$

次に $x_{n+1} - x_n$ を考えると

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{{x_n}^2 + 2}{3} - \frac{{x_{n-1}}^2 + 2}{3} \\ &= \frac{{x_n}^2 - {x_{n-1}}^2}{3} \\ &= \frac{(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1})}{3} \end{aligned}$$

$x_n > 1$ なので $x_n + x_{n-1} > 1$

したがって

$x_n < x_{n-1}$ ならば $x_{n+1} < x_n$

$x_2 < x_1$ は成立しているので帰納法より $x_n < x_{n-1}$

よって $x_n < x_{n-1} < x_{n-2} < \cdots < x_1 = a$

以上より

$$1 < x_n < a$$

(2)

$f(n) = \left(\dfrac{a+1}{3}\right)(x_{n-1} - 1) - (x_n - 1)$ とおく

$k=2$ のとき

$$\begin{aligned}
f(2) &= \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_1-1)-(x_2-1)\\
&= \left(\frac{a+1}{3}\right)(a-1)-(\frac{a^2+2}{3}-1)\\
&= \left(\frac{a+1}{3}\right)(a-1)-(\frac{a^2-1}{3})\\
&= (a-1)\left(\frac{a+1-(a+1)}{3}\right)=0
\end{aligned}$$

$k>2$ において

$$\begin{aligned}
f(k) &= \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{k-1}-1)-(x_k-1)\\
&= \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{k-1}-1)-(\frac{{x_{k-1}}^2+2}{3}-1)\\
&= \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{k-1}-1)-(\frac{{x_{k-1}}^2-1}{3})\\
&= \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{k-1}-1)-(\frac{(x_{k-1}-1)(x_{k-1}+1)}{3})\\
&= (x_{k-1}-1)\left(\frac{a+1-(x_{k-1}+1)}{3}\right)\\
&= (x_{k-1}-1)\left(\frac{a-x_{k-1})}{3}\right)
\end{aligned}$$

(1) により $1<x_n<a$ なので
$a-x_{k-1}>0$ かつ $x_{k-1}-1>0$
以上より
$k=2$ において

$$f(2)=0$$

$k>2$ において

$$f(k)>0$$

つまり $n \geqq 2$ において

$$(x_n-1) \leqq \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{n-1}-1)$$

(3)
以下のような数列 y_n を考える。
$y_1=x_1-1$
$y_n=\left(\frac{a+1}{3}\right)y_{n-1}$ $(n>1)$
$n=2$ のとき
$y_2=\left(\frac{a+1}{3}\right)y_1=\left(\frac{a+1}{3}\right)(x_1-1) \geqq x_2-1$ (2) より
$x_2-1 \leqq y_2$
$n=k-1$ のとき成り立つと仮定すると
$y_k=\left(\frac{a+1}{3}\right)y_{k-1} \geqq \left(\frac{a+1}{3}\right)(x_{k-1}-1) \geqq x_k-1$
よって $n \geqq 2$ において $x_n-1 \leqq y_n$
$1<a<2$ より
$\frac{2}{3}<\frac{a+1}{3}<1$

y_n は等比数列で比は $\dfrac{a+1}{3}$
したがって初項 $y_1 = a - 1$ より
$y_n = \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^{n-1} (a-1)$
したがって、y_n は収束して

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1} (a-1)$$

$\dfrac{a+1}{3} < 1$ より
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a+1}{3}\right)^{n-1} = 0$
$a - 1$ は定数なので

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

$1 < x_n < y_n + 1$ より

$$1 \leqq \lim_{n\to\infty} x_n \leqq \lim_{n\to\infty} y_n + 1$$

前述の通り y_n は収束して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ なので

$$1 \leqq \lim_{n\to\infty} x_n \leqq 1$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$