京都大学　1970 年　入学試験　理系数学　問題 1

問題

x の関数 $f(x)$ のグラフ $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線が，点 $(c, 0)$ を通り，$a \neq c$ であるものとする．このとき関数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$ の $x=a$ における微分係数を求めよ．

解答

問題より $f(x)$ は点 $(a, f(a))$ で接線が定義できるので

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

が定義できる。
したがって $f(x)$ の点 a における接線の傾きは $f'(a)$
また、点 $(c, 0)$ 通るので
接線の式を $y=f'(a)x+b$ とすると
$0=cf'(a)-b$ より $b=-cf'(a)$
したがって、接線の式は

$$y=f'(a)x-cf'(a) \tag{1}$$

$g(x)$ の $x=a$ における微分係数 $g'(a)$ は

$$g'(a)=\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{x-c}$$

より
$a \neq c$ なので

$$g(a)=\frac{f(a)}{a-c}$$

接線 (1) は点 $(a, f(a))$ を通るので
$f(a)=y=f'(a)(a-c)$
よって

$$g(a)=\frac{f'(a)(a-c)}{a-c}=f'(a)$$

したがって

$$
\begin{aligned}
g'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x)}{x-c} - f'(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f'(a)(x-c)}{(x-c)(x-a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) + f(a) - f'(a)(x-c)}{(x-c)(x-a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) + f'(a)(a-c) - f'(a)(x-c)}{(x-c)(x-a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{(x-c)(x-a)} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{1}{x-c} \left(\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} - f'(a) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} &= f'(a) \\
\lim_{x\to a} \frac{1}{x-c} &= \frac{1}{a-c} \\
\lim_{x\to a} f'(a) &= f'(a)
\end{aligned}
$$

となりそれぞれ 0 以外の値に収束するので

その積と和はそれぞれの値の積と和に収束する

したがって

$$
\begin{aligned}
g'(a) &= \left(\lim_{x\to a} \frac{1}{x-c} \right) \left(\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)} - \lim_{x\to a} f'(a) \right) \\
&= \frac{1}{a-c} (f'(a) - f'(a)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

したがって $g(x)$ の $x = a$ における微分係数は 0