京都大学　1970 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

数学的帰納法によって，$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$ を証明せよ．
ここに n は 2 以上の整数とする．

解答

$f(n) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad g(n) = n!$ とする。

$n = 2$ の時
$f(2) - g(2) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2! = \left(\frac{9}{4}\right) - 2 = \frac{1}{4} > 0$
よって $f(2) > g(2)$
したがって $n = 2$ のとき不等式は成り立つ。

$n = k - 1$ のとき成り立つと仮定すると
$n = k$ のとき
$f(k) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^k$
$f(k-1) = \left(\frac{k}{2}\right)^{k-1}$
$kf(k-1) = \left(\frac{k^k}{2^{k-1}}\right)$
となる。

ここで $\frac{f(k)}{kf(k-1)}$ を考える。

$$
\begin{aligned}
\frac{f(k)}{kf(k-1)} &= \left(\frac{(k+1)^k}{2^k}\right)\left(\frac{2^{k-1}}{k^k}\right) \\
&= \left(\frac{(k+1)^k 2^{k-1}}{2^k k^k}\right) \\
&= \left(\frac{(k+1)^k}{2k^k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$ を 2 項展開すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(1+\binom{k}{1}\left(\frac{1}{k}\right)^1+\binom{k}{2}\left(\frac{1}{k}\right)^2+\binom{k}{3}\left(\frac{1}{k}\right)^3+ \\
&\quad \cdots+\binom{k}{k-1}\left(\frac{1}{k}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{k}\right)^k\Bigg) \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(1+1+\frac{k(k-1)}{2!}\left(\frac{1}{k}\right)^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\left(\frac{1}{k}\right)^3+ \\
&\quad \cdots+\frac{k(k-1)\cdots(2)}{(k-1)!}\left(\frac{1}{k}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{k}\right)^k\Bigg)
\end{aligned}
$$

ここで右辺の括弧内の項はすべて正なので括弧内は始めの 2 項の和 2 より大きい

したがって右辺は 1 より大きい

つまり $\dfrac{f(k)}{kf(k-1)} > 1$

$f(n) > 0$ より $kf(k-1)$ を両辺にかけても不等号は変わらないので

$f(k) > kf(k-1)$

仮定より

$kf(k-1) > kg(k-1) = g(k)$ なので

$$f(k) > kf(k-1) > g(k)$$

以上より $n = k-1$ のとき成立すると仮定すれば、$n = k$ のときも成立する。

よって数学的帰納法より

$\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n!$ は $n \geqq 2$ において成立する。