京都大学　1970 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

数学的帰納法によって，$\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n!$ を証明せよ.
ここに n は 2 以上の整数とする.

解答

$f(n) = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$
$g(n) = n!$ とする。

$$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$$
$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot n} = \sqrt[n]{n!}$$

相加平均 $\geqq$ 相乗平均より

$$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n} \geqq \sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot n}$$

したがって

$$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$$

よって

$$\frac{n+1}{2} \geqq \sqrt[n]{n!}$$

両辺とも正で 1 より大きいので両辺を n 乗しても不等号は成り立つ
したがって

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geqq n!$$

相加平均 $=$ 相乗平均は全ての項が等しい時のみ成立するが、この場合項は異なるので等号は成立しないしたがって

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$$