京都大学　1970年　入学試験　理系数学　問題3

問題

空間に2直線 l，g がある．
l，g の上にそれぞれ3点 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$，$\mathrm{A_3}$；$\mathrm{B_1}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{B_3}$ が
この順にあって，$\mathrm{A_1A_2} = \mathrm{B_1B_2}$，$\mathrm{A_2A_3} = \mathrm{B_2B_3}$ であるとする．
線分 $\mathrm{A_1B_1}$，$\mathrm{A_2B_2}$，$\mathrm{A_3B_3}$ の中点を
それぞれ $\mathrm{M_1}$，$\mathrm{M_2}$，$\mathrm{M_3}$ とするとき，
3点 $\mathrm{M_1}$，$\mathrm{M_2}$，$\mathrm{M_3}$ は同一直線の上にあることを証明せよ．

解答

点 $\mathrm{A_1}$ と点 $\mathrm{A_2}$ が同一である場合
定義より $\overline{\mathrm{B_1B_2}} = 0$
よって、点 $\mathrm{B_1}$ と点 $\mathrm{B_2}$ が同一
したがって、$\mathrm{M_1}$，$\mathrm{M_2}$ は同一の点となり、$\mathrm{M_3}$ がどこにあったとしても
$\mathrm{M_1}$ と $\mathrm{M_3}$ を結ぶ直線上に3点 $\mathrm{M_1}$，$\mathrm{M_2}$，$\mathrm{M_3}$ はある。

点 $\mathrm{A_1}$ と点 $\mathrm{A_2}$ が同一ではない場合
原点を適当な場所にとってそれを O とする
$k = (1, 2, 3)$ において
$\vec{a_k} = \overrightarrow{\mathrm{OA}_k} \quad \vec{b_k} = \overrightarrow{\mathrm{OB}_k} \quad \vec{m_k} = \overrightarrow{\mathrm{OM}_k}$
と定義する。
定義から
$\vec{m_k} = \dfrac{\vec{a_k} + \vec{b_k}}{2}$
また $\mathrm{A_1}, \mathrm{A_2}, \mathrm{A_3}$ はこの順で直線上にあるので
$\vec{a_3} - \vec{a_1} = t(\vec{a_2} - \vec{a_1})$ となる。
t は $\overline{\mathrm{A_1A_3}}/\overline{\mathrm{A_1A_2}}$
(点 $\mathrm{A_1}$ と点 $\mathrm{A_2}$ が同一ではないので分母は0ではない)

同様に $\vec{b_3} - \vec{b_1} = s(\vec{b_2} - \vec{b_1})$ となるが
$s = \overline{\mathrm{B_1B_3}}/\overline{\mathrm{B_1B_2}}$ となり
$\mathrm{B_1B_3} = \mathrm{B_1B_2} + \mathrm{B_2B_3}$
$\mathrm{B_1B_2} = \mathrm{A_1A_2}$
$\mathrm{B_2B_3} = \mathrm{A_2A_3}$
から $s = t$ となり
$\vec{b_3} - \vec{b_1} = t(\vec{b_2} - \vec{b_1})$ となる。

$$
\begin{aligned}
\vec{m_2} - \vec{m_1} &= \frac{\vec{a_2} + \vec{b_2}}{2} - \frac{\vec{a_1} + \vec{b_1}}{2} \\
&= \frac{\vec{a_2} - \vec{a_1} + \vec{b_2} - \vec{b_1}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{m_3} - \vec{m_1} &= \frac{\vec{a_3} + \vec{b_3}}{2} - \frac{\vec{a_1} + \vec{b_1}}{2} \\
&= \frac{\vec{a_3} - \vec{a_1} + \vec{b_3} - \vec{b_1}}{2}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\vec{m_3} - \vec{m_1} &= \frac{\vec{a_3} + \vec{b_3}}{2} - \frac{\vec{a_1} + \vec{b_1}}{2} \\
&= \frac{t(\vec{a_2} - \vec{a_1}) + t(\vec{b_2} - \vec{b_1})}{2} \\
&= t\frac{\vec{a_2} - \vec{a_1} + \vec{b_2} - \vec{b_1}}{2} \\
&= t(\vec{m_2} - \vec{m_1})
\end{aligned}
$$

よって

$$\vec{m_3} - \vec{m_1} = t(\vec{m_2} - \vec{m_1})$$

よって点 $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \mathrm{M}_3$ の 3 点は同一直線上にある。