京都大学　1971 年　入学試験　文系数学　問題 1

問題

1. 次の $\boxed{}$ の中に適当な数あるいは語句をいれ，その理由をしるせ．
   $x > 0$ において，直線 $y = ax$ (a は正数) と曲線 $xy = 1$ との交点を P とする．原点を O とするとき，線分 OP の長さ $\overline{\mathrm{OP}}$ が最小となるのは $a = \boxed{}$ のときで，そのとき $\overline{\mathrm{OP}} = \boxed{}$ である．$a \geqq 1$ では，a が増加するとともに $\overline{\mathrm{OP}}$ は $\boxed{}$ し，$a < 1$ では，a が増加するとともに $\overline{\mathrm{OP}}$ は $\boxed{}$ する．
2. $0 < xy \leqq 1$，$1 \leqq \dfrac{y}{x} \leqq \sqrt{3}$，$x > 0$ をみたす点 (x, y) の範囲を考える．点 Q はこの範囲にあるものとして，$\overline{\mathrm{OQ}}$ の最大値，およびそのとき線分 OQ が x 軸となす角を求めよ．

解答

1.

$x > 0$ において，直線 $y = ax$ (a は正数) と曲線 $xy = 1$ との交点を P とする．原点を O とするとき，線分 OP の長さ $\overline{\mathrm{OP}}$ が最小となるのは $a = [1]$ のときで，そのとき $\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{2}$ である．$a \geqq 1$ では，a が増加するとともに $\overline{\mathrm{OP}}$ は [増加] し，$a < 1$ では，a が増加するとともに $\overline{\mathrm{OP}}$ は [減少] する．

$x > 0$ における、$y = ax$ と $xy = 1$ の交点の x 座標は、方程式 $x(ax) - 1 = 0$ の解となる
解は $x = \pm\sqrt{1/a}$ であるが、$x > 0$ の条件から $x = \sqrt{1/a}$
このときの y の値は $\sqrt{a}$
このとき、$\overline{\mathrm{OP}}$ の長さを l とすると、
$l^2 = x^2 + y^2 = 1/a + a$
l は長さなので、正なので
$l = \sqrt{1/a + a}$
また、l^2 は常に正なので、l の増減と l^2 の増減は一致する。
従って、l^2 を a の関数と見たとき、$l^2 = f(a)$ とおくと
$f(a) = 1/a + a$
このとき、$f(a)$ を微分すると $f'(a) = 1 - 1/a^2$
$f'(a)$ は単調増加で $a = 1$ において 0 となるので $0 < a < 1$ の範囲で負、$a > 1$ で正
従って、$f(a)$ は、$0 < a < 1$ の範囲で減少し、$a > 1$ で増加する。
よって、$a = 1$ で最小値となり, そのときの最小値は 2 よって、$l = \sqrt{2}$

2.

$0 < xy \leqq 1$，$1 \leqq \dfrac{y}{x} \leqq \sqrt{3}$，$x > 0$ をみたす点 (x, y) の範囲を考える．点 Q はこの範囲にあるものとして，$\overline{\mathrm{OQ}}$ の最大値，およびそのとき線分 OQ が x 軸となす角を求めよ．
$1 \leqq \dfrac{y}{x} \leqq \sqrt{3}$，$x > 0$ より、
$x \leqq y \leqq x\sqrt{3}$
点 Q の座標を (a, b) とすると、各 a について、b の範囲は
$a \leqq b \leqq a\sqrt{3}$ かつ $b \leqq 1/a$ の範囲
また、$a > 1/a$ となると、共通する範囲が無くなるので、$a \leqq 1/a$ の範囲にかぎる。
つまり、$a^2 \leqq 1a > 0$ なので $a \leqq 1$

したがって、a の範囲を以下の二つに分けて考える。
$1/a \leqq a\sqrt{3}$ つまり、$a^2 \geqq 1/\sqrt{3}$ かつ $a \leqq 1$
$1.1/\sqrt[4]{3} \leqq a \leqq 1$
$2.0 < a \leqq 1/\sqrt[4]{3}$

$1.1/\sqrt[4]{3} \leqq a \leqq 1$ の範囲を考える。
この範囲では $\overline{\mathrm{OQ}} = m$ とすると
$m^2 = a^2 + b^2 \leqq a^2 + (1/a^2)$
$g(a) = a^2 + (1/a^2)$ とすると、$g'(a) = 2a - 2/a^3 = 2(a^4 - 1)/a^3$
$1/\sqrt[4]{3} \leqq a \leqq 1$ の範囲では、$a^4 < 1$ なので $g'(a) < 0$ よって、
$g(a)$ は単調減少。
したがって、a がの最小時に最大値を取る。
よって、のそのときのは値は $m^2 = (1/\sqrt{3}) + (\sqrt{3}) = 4/\sqrt{3}$
したがって、$m = \dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$

2. の範囲を考えると
同様に $m^2 = a^2 + b^2 \leqq a^2 + 3a^2 = 4a^2$
したがって、$m \leqq 2a$
よって m の最大値は、$2a$ となり、a の最大値で最大となるので、$a = 1/\sqrt[4]{3}$ のとき
$m = \dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$ となる。1,2 の両方の範囲で、m の最大値は $\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$ となるので、
$\overline{\mathrm{OQ}}$ の最大値は $\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$

そのときの $a/m = 1/2$
つまり、$\overline{\mathrm{OQ}}$ と x 軸のなす角を θ とすると、$\cos\theta = 1/2$
$0 < \theta < \pi/2$ の範囲で、$\cos\theta = 1/2$ となるのは $\theta = \pi/3$
よって、$\overline{\mathrm{OQ}}$ と x 軸のなす角は $\dfrac{\pi}{3}$