京都大学　1971 年　入学試験　文系数学　問題 2

問題

α，β は複素数で，α の絶対値は 1 とする．このとき

$$z+\alpha\overline{z}+\beta=0$$

を満足する複素数 z があるための必要十分条件は $\alpha\overline{\beta}=\beta$ であることを示せ．ここに $\overline{z}$，$\overline{\beta}$ はそれぞれ z，β の共役複素数を表わす．

解答

$\alpha=a+bi \quad \beta=c+di \quad z=x+yi$
$\overline{\alpha}=a-bi \quad \overline{\beta}=c-di \quad \overline{z}=x-yi$ とおく
$|\alpha|=1$ より $a^2+b^2=1$

z が存在すると仮定すると

$$\begin{aligned}
&x+yi+(a+bi)(x-yi)+(c+di)\\
&=x+yi+ax+bxi-ayi+by+(c+di)\\
&=(a+1)x+by+c+(bx+(1-a)y+d)i
\end{aligned}$$

より
$(a+1)x+by+c=0$
$bx+(1-a)y+d=0$
となる必要がある。
$(a+1)x+by+c=0$ に $(a-1)$ をかけて変形すると

$$\begin{aligned}
&(a-1)((a+1)x+by+c)\\
&=(a-1)(a+1)x+(a-1)by+(a-1)c\\
&=(a^2-1)x+(a-1)by+(a-1)c\\
&=-b^2x+(a-1)by+(a-1)c\\
&=b(-bx+(a-1)y)+(a-1)c=0
\end{aligned}$$

$bx+(1-a)y+d=0$ より $d=-bx+(a-1)y)$ なので
$b(-bx+(a-1)y)+(a-1)c=bd+ac-c=0$ より

$$bd+ac=c \tag{1}$$

同様に
$bx+(1-a)y+d=0$ に $(a+1)$ をかけて変形すると

$$
\begin{aligned}
&(1+a)(bx+(1-a)y+d)\\
&=(1+a)bx+(1-a^2)y+(1+a)d\\
&=(1+a)bx+b^2y+(1+a)d\\
&=b(by+(a+1)x)+(1+a)d=0
\end{aligned}
$$

$by+(a+1)x=-c$ より
$-bc+d+ad=0$ となり

$$
bc-ad=d \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha\overline{\beta}&=(a+bi)(c-di)\\
&=ac+bci-adi+bd\\
&=ac+bd+bci-adi\\
&=ac+bd+(bc-ad)i
\end{aligned}
$$

なので
(1),(2) より
$ac+bd+(bc-ad)i=c+di=\beta$
よって z が存在すれば、$\alpha\overline{\beta}=\beta$
逆に
$\alpha\overline{\beta}=\beta$
ならば
$ac+bd=c, bc-ad=d$ より
$ac-c=-bd$
$bc=d+ad$

$$
\begin{aligned}
(a-1)((a+1)x+by+c)&=(a^2-1)x+(a-1)by+(a-1)c)\\
&=(a^2-1)x+(a-1)by+ac-c\\
&=-b^2x+(a-1)by-bd\\
&=-b(bx+(a-1)y-d)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1+a)(bx+(1-a)y+d)&=(1+a)bx+(1-a^2)y+(1+a)d\\
&=(1+a)bx+b^2y+d+ad\\
&=(1+a)bx+b^2y+bc\\
&=b((1+a)x+by+c)
\end{aligned}
$$

なので
$(1+a)x+by+c=t$,$bx+(a-1)y-d=s$ とおくと $(a-1)t=-bs$ かつ $(a+1)s=-bt$
$b\neq 0$ としたとき $(a-1)t/b=-s$

これを代入すると

$$\begin{aligned}(a+1)(a-1)t/b &= bt\\ (a^2-1)t &= b^2t\\ -b^2t &= b^2t\\ -t &= t\\ 2t &= 0\end{aligned}$$

よって $t=0$
同様に $s=0$
よって

$$z+\alpha\overline{z}+\beta=0$$

以上より
$z+\alpha\overline{z}+\beta=0$
を満足する複素数 z があるための必要十分条件は $\alpha\overline{\beta}=\beta$ である