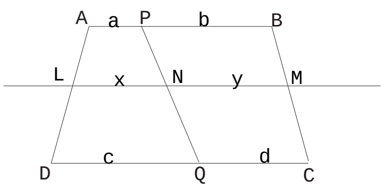
京都大学　1971 年　入学試験　文系数学　問題 3

問題

　台形 ABCD の平行な 2 辺 AB，DC 上にそれぞれ点 P，Q をとる．次に AB に平行な直線が辺 AD，BC および線分 PQ と交わる点をそれぞれ L，M，N とし，AP = a，PB = b，DQ = c，QC = d，LN = x，NM = y とする．$ad - bc > 0$，$c \neq 0$ のとき，$\frac{y}{x}$，$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$ の大小をしらべよ．

解答



$ad > bc$

a, b, c, d, x, y は正、$c \neq 0$ なので、$ad > 0, bc > 0$ より、$b = 0$ であったとしても、$ad \neq 0$ より、$a \neq 0$ かつ $d \neq 0$

以上より、

両辺を、ac で割ることができ、不等号は成立する。

したがって、$\frac{d}{c} > \frac{b}{a}$

１．AD と PQ が平行だった場合

$a = x = c$

PQ と BC が平行だった場合、$b = y = d$ となるが、の前述通り、$\frac{d}{c} > \frac{b}{a}$ なので

これはあり得ない。

また、$c \neq 0$ より、ADPQ とは一致しない。

従って PQ と BC がは平行ではない。

そのとき PQ と BC の延長線は１点で交わる。

その交点を F とすると、△FBP,△FMN,△FCQ, はが底辺が平行なので、相似形

$a = x = c$ だから、$d > b$

LM は線分 AD,BC と交わるので、線分、AB,CD の間に有ることから、

FB≦FM≦FC となる。

したがって、対応するの辺の比は同じなので、$b \leqq y \leqq d$

よって $\frac{b}{a} \leqq \frac{y}{x} \leqq \frac{d}{c}$

２．PQ と BC が平行だった場合

PQ と BC が一致しない場合

１と同様にして $b = y = d$ で、PQ と QC が平行ではないので

その延長線の交点を E とすると、△EAP,△ELN,△EDQ は相似

$b = y = d$ だから、$c < a$

ED≦ EL ≦ EA となる。

よって、$d \leqq x \leqq b$

したがって、$\frac{b}{a} \leqq \frac{y}{x} \leqq \frac{d}{c}$

PQ と BC が一致すとすると

$b=y=d=0$ なので
$d\neq 0$ に反するので一致しない

３．PQ と BC が平行ではなく、PQ と AD が平行ではない場合
BC と AD は平行であっても、平行でなくてもかまわない。
PQ と BC の交点を E,PQ と AD の交点を F とすると、
１，２と同様に
△EAP,△ELN,△EDQ は相似
△FBP,△FMN,△FCQ は相似
従って、
EP:EN:EQ$=a:x:c$
FP:FN:FQ$=b:y:d$
EP$=l$,PN$=m$,NQ$=n$,QF$=p$
とすると
、E,F が P 側にあるとすると、
$l:l+m:l+m+n=a:x:c$
$p:p+m:p+m+n=b:y:d$
従って、
$b/a=p/l$
$y/x=(p+m)/(l+m)$
$d/c=(p+m+n)/(l+m+n)$
$b/a<d/c$ より
$p/l<(p+m+n)/(l+m+n)$
$pl+pm+pn<pl+lm+ln$
$p(m+n)<l(m+n)$
$p<l$
よって、
$pl+pm<pl+lm$
$p/l<(p+m)/(l+m)$
同様に
$(p+m)/(l+m)<(p+m+n)/(l+m+n)$
となり、

$$\frac{b}{a}\leqq\frac{y}{x}\leqq\frac{d}{c}$$

E,F が Q 側に有る場合も、E が P 側、F が Q 側、またその逆も同様にして、

$$\frac{b}{a}<\frac{y}{x}<\frac{d}{c}$$

以上より、すべての場合について

以下のような大小関係となる。

$$\frac{b}{a}\leqq\frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x}\leqq\frac{d}{c}$$

$$\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$$