京都大学　1971 年　入学試験　文系数学　問題 4

問題

xy 平面上の曲線 $y=\sqrt{|x^2-1|}$ と直線 $y=2$ とが囲む図形を x 軸のまわりに回転してえられる回転体の体積を求めよ.

解答

$y=\sqrt{|x^2-1|}$
$x^2<1 \to -1<x<1$ の範囲では $y=\sqrt{1-x^2} \to y^2=1-x^2 \to x^2+y^2=1$ となり、半径 1 の円の y 軸が正の部分となる。$x^2 \geqq 1$ では、$y=\sqrt{x^2-1} \to y^2=x^2-1$ となり
$x^2-1>4 \to |x|>\sqrt{3}$ において $y>2$ となるので
問題の曲線と直線が囲む図形は $-\sqrt{3} \leqq |x| \leqq \sqrt{3}$ の範囲となる。
したがって、求める体積は半径 2 高さ $2\sqrt{3}$ の円柱から
半径 1 の球と $1<x<\sqrt{3}$ の範囲で $y=\sqrt{x^2-1}$ を回転させた図形の 2 倍を引いたものとなる。
$1<x<\sqrt{3}$ の範囲で $y=\sqrt{x^2-1}$ を回転させた図形の体積は

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\sqrt{3}} \pi y^2\,dx \\
&= \int_1^{\sqrt{3}} (x^2-1)\pi\,dx \\
&= \left[\frac{\pi x^3}{3} - \pi x\right]_1^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\pi\sqrt{3}^3}{3} - \pi\sqrt{3} - \left(\frac{\pi 1^3}{3} - \pi 1\right) \\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

よって、全体の体積は
円柱の体積 $\pi r^2 h = \pi(2^2)(2\sqrt{3}) = 8\pi\sqrt{3}$ から球の体積 $\frac{4\pi}{3}$ と $\frac{2\pi}{3}$ の 2 倍を引いたもの
よって

$$\begin{aligned}
&8\pi\sqrt{3} - \pi\frac{4}{3} - 2\frac{2\pi}{3} \\
&= \pi(8\sqrt{3} - \frac{8}{3}) \\
&= 8\pi(\sqrt{3} - \frac{1}{3}) \\
&= 8\pi(\frac{3\sqrt{3}-1}{3})
\end{aligned}$$