京都大学　1971 年　入学試験　文系数学　問題 5

問題

　空間に正方形がある．これを一つの平面に正射影したとき，2 辺の長さおよび一つの頂角がそれぞれ $2\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ および 30° であるような平行四辺形がえられた．

1. 平行四辺形の二つの対角線の長さを求めよ．
2. もとの正方形の面積を求めよ．

解答

空間の正方形を基準とした座標系を考える。
正方形の頂点の一つを原点とし、原点を含む１辺を x 軸、もう１辺を y 軸とする。
また、正方形の１辺の長さを l とおく。
つまり正方形の各点を OABC としたとき、各頂点の座標は
O$=(0,0,0)$
A$=(l,0,0)$
B$=(l,l,0)$
C$=(0,l,0)$
となる。

平面 P の式は、$z=ax+by+c$ と表せるが、この際、c の値が変わっても、x,y 平面に対して垂直方向への移動だけなので、射影される図形は変わらない。
そこで $c=0$ としても問題はない。
平面の式を $z=ax+by$ とする。
平面 P への射影によって頂点 O,A,B,C のうつる頂点を順に $\mathrm{O}',\mathrm{A}',\mathrm{B}',\mathrm{C}'$ とすると
$\mathrm{O}'=(0,0,0)$
$\mathrm{A}'=(l,0,al)$
$\mathrm{B}'=(l,l,(a+b)l)$
$\mathrm{C}'=(0,l,bl$
このとき、平面 P に射影した、２辺の長さが $2\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$
１つの角が 30° の平行四辺形だから、
向かい合う辺の長さは等しいので、２辺の長さはそれぞれとなりあう辺の長さとなる。
したがって、
$\mathrm{O}'\mathrm{A}'=2\sqrt{2}$
$\mathrm{O}'\mathrm{C}'=\sqrt{6}$
$\angle\mathrm{A}'\mathrm{O}'\mathrm{C}'=30^\circ$
としても、問題は無い。

平行四辺形の対角線の長さを以下の様におくと

$m = \mathrm{A'C'}$,$n = \mathrm{A'C'}$

$$
\begin{aligned}
m^2 &= (\mathrm{O'A'})^2 + (\mathrm{O'C'})^2 - 2(\mathrm{O'A'})(\mathrm{O'C'})\cos 30^\circ \\
&= (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{6})\sqrt{3}/2 \\
&= 8 + 6 - 12 = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n^2 &= (\mathrm{A'O'})^2 + (\mathrm{A'B'})^2 - 2(\mathrm{A'O'})(\mathrm{A'B'})\cos 150^\circ \\
&= (2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{6})(-\sqrt{3}/2) \\
&= 8 + 6 + 12 = 26
\end{aligned}
$$

以上より、

$$m = \sqrt{2}, n = \sqrt{26}$$

また、上記の座標値より、$\mathrm{O'A'}^2 = l^2 + a^2 l^2 = (1 + a^2) l^2 = 8$

$\mathrm{O'C'}^2 = l^2 + b^2 l^2 = (1 + b^2) l^2 = 6$

$\mathrm{A'C'}^2 = l^2 + l^2 + (a - b)^2 l^2 = (2 + (a - b)^2) l^2 = 2$

a,b,l についての連立方程式

$$
\begin{aligned}
(1 + a^2) l^2 &= 8 \qquad (1) \\
(1 + b^2) l^2 &= 6 \qquad (2) \\
(2 + (a - b)^2) l^2 &= 2 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

を l^2 について解くと

(3)-((1)+(2)) より

$$
\begin{aligned}
(2 + (a - b)^2) l^2 - ((1 + a^2) l^2 + (1 + b^2) l^2) &= 2 - (8 + 6) \\
(2 + (a - b)^2 - (1 + a^2) - (1 + b^2)) l^2 &= -12 \\
(2 + a^2 - 2ab + b^2 - 1 - a^2 - 1 - b^2) l^2 &= -12 \\
(-2ab) l^2 &= -12 \\
ab l^2 &= 6
\end{aligned}
$$

$a^2 b^2 l^4 = 36$

$a^2 = 8/l^2 - 1$,$b^2 = 6/l^2 - 1$ より

$$
\begin{aligned}
(8/l^2 - 1)(6/l^2 - 1) l^4 &= 36 \\
(8 - l^2)(6 - l^2) &= 36 \\
48 - 14 l^2 + l^4 &= 36 \\
l^4 - 14 l^2 + 12 &= 0
\end{aligned}
$$

$$l^2 = 7 \pm \sqrt{37}$$

しかし、$a^2 = 8/l^2 - 1$ より $8/l^2 - 1 > 0$ でなければならないので、$8/l^2 > 1$ つまり、$l^2 < 8$

$7 + \sqrt{37} > 7 + 6 = 13$ より、$l^2 = 7 - \sqrt{37}$

もとの正方形の面積は、l^2 なので

正方形の面積は

$$7 - \sqrt{37}$$