京都大学　1971 年　入学試験　文系数学　問題 6

問題

3 次関数 $f(x) = x^3 - ax$（a は実数）の絶対値 $|f(x)|$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値は，a の値が何であっても，つねに $\dfrac{1}{4}$ より小さくないことを証明せよ.

解答

$f'(x) = 3x^2 - a$
よって、$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で考えると
この区間では $f'(x)$ は単調増加なので $x = 0$ の点で最小となり、$x = 1$ の点で最大となる
したがって、$-a \leqq f'(x) \leqq 3 - a$ の範囲で変化する。
$f'(x) = 0$ がどこに存在するかによって分類すると

1. $a \leqq 0$ のとき、$f'(x)$ は常に正

2. $0 < a < 3$ のとき $f'(0) < 0$ かつ $f'(1) > 0$ なので $f'(x) = 0$ となる x が $0 < x < 1$ の範囲に存在する。

3. $a \geqq 3$ のとき、$f'(x)$ は常に負

1. のとき
$f(x)$ は単調増加なので、$f(0)$ で最小値をとり、$f(1)$ で最大値をとる。
その値は $f(0) = 0$,$f(1) = 1 - a$
$a \leqq 0$ なので、$1 - a > 1$
よって、$|f(x)|$ の最大値は $1 - a > 1$

2. のとき
$f'(x) = 0$ の点 $x = \sqrt{a/3}$ において、
最小値 $f(\sqrt{a/3}) = (\sqrt{a/3})^3 - a(\sqrt{a/3}) = (a/3)\sqrt{a/3} - a(\sqrt{a/3}) = -2a\sqrt{a}/3\sqrt{3}$ をとる。
また、このとき、$f(0) = 0$,$f(1) = 1 - a$ なので、
最大値は、$a < 1$ のとき $1 - a > 0$,$1 \leqq a < 3$ のとき 0 となる。
$0 < a < 1$ の範囲を考える。
この区間で、絶対値の最大値をかんがえるばあい、最小値は上の通り負で、最大値は正なので
最小値の絶対値と最大値の大きい方が絶対値の最大値となる。
そこで、最小値の絶対値と最大値が等しい場合を考えると、次の式となる。
$1 - a = 2a\sqrt{a}/3\sqrt{3}$
両辺を 2 乗し、変形すると $4a^3 - 27a^2 + 54a - 27 = 0$ これを a について解くと
$a = 3/4, 3$
今 $0 < a < 1$ なので、$a = 3/4$ のとき、最小値の絶対値とと最大値は一致する。
この前後で場合を分けて考えると $0 \leqq a < 3/4$ の範囲では、
最大値は $1 - a > 1/3 > 1/4$ よって、$1/4$ より小さくない
最小値の値にかかわり無くこの範囲では、絶対値の最大値は $1/4$ より小さくない。

$3/4 \leqq a \leqq 1$ の範囲では最小値 $= -2a\sqrt{a}/3\sqrt{3}$
最小値を a の関数とみたとき、この値は単調減少
よって、$a = 3/4$ の点で最大、であるが、負なので、絶対値は最小となる。
そのときの値は $-3/4$ したがって、絶対値は $3/4$
最大値の値にかかわり無くこの範囲では、絶対値の最大値は $1/4$ より小さくない。

$1 \leqq a < 3$ の範囲を考える。
このとき、この区間の最大値は 0
よって、絶対値が最大となるのは、値が最小となったとき
前述のとおりこの区間では $x = a/3$ の点で最小値 $-2a\sqrt{a}/3\sqrt{3}$ をとる。
したがって、絶対値の最大値は $2a\sqrt{a}/3\sqrt{3}$
この値を a の関数と考えると、これは、増加なので
$a = 1$ の点で最小値をとる。
このときの値は $2/3\sqrt{3} = \sqrt{4/27} > \sqrt{4/64} = 1/4$
よって絶対値の最大値は $1/4$ より小さくない。

3. のとき
$f'(x)$ は常に負なので、$f(x)$ はこの範囲で単調減少。
した g って、$x = 0$ の点で最大値をとり、$x = 1$ の点で最小値をとる。
それぞれの値は、$f(0) = 0$,$f(1) = 1 - a < -2$
したがって、絶対値の最大値は、$x = 1$ のときでその値は 2

以上より、
任意の a において、$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲での $f(x)$ の絶対値の最大値は $1/4$ より小さくない。