京都大学　1971 年　入学試験　理系数学　問題 1

問題

座標平面において，x，y がともに整数であるような点 (x,y) を格子点とよぶことにする．この平面上で

1. 辺の長さが 1 で，辺が座標軸に平行な正方形（周をこめる）は少なくとも 1 つの格子点を含むことを証明せよ．
2. 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形（周をこめる）は，どんな位置にあっても，少なくとも 1 つの格子点を含むことを証明せよ．

解答

1.
辺の長さが 1 で座標軸に平行な正方形 A は 4 つの頂点の内最も (x,y) の小さい頂点の座標を (a,b) とすると、辺を含む正方形の範囲は

$$A:\begin{cases} a \leqq x \leqq a+1 \\ b \leqq y \leqq b+1 \end{cases}$$

a が整数のとき
b が整数ならば、点 (a,b) が格子点となるため、辺上に格子点が存在する
b が整数でないと仮定すると $b+1$ を越えない最大の整数を $[b+1]$ とすると
$[b+1] < b+1$
このとき、$b \leqq [b+1]$ となると、点 (a,[b+1]) がこの範囲に含まれるので
格子点が辺上に存在する。
$[b+1] < b$ と仮定すると
両辺に 1 をたすと $[b+1]+1 < b+1$
$[b+1]+1$ は整数の加算なので、整数。
また、$[b+1]+1 \neq [b+1]$ より
$[b+1]$ が $b+1$ を越えない最大の整数であることに反する。
したがって、$[b+1] < b$ は成立しない。
よって格子点が辺上に存在する。
次に a が整数でないとき
b が整数のときは上記の a,b を入れ換えた議論と同じなので格子点は辺上に存在する。
b が整数でないとき
上記の後半と同様に $[a+1]$ を $a+1$ を越えない最大の整数とすると
$a < [a+1] < a+1$ となる。
また同様に $[b+1]$ を $b+1$ を越えない最大の整数とすると
$b < [b+1] < b+1$ となる。
このとき点 $([a+1],[b+1])$ は x,y 共に整数でかつ A の範囲に含まれるので格子点が内部に存在する。
以上より、少なくとも一つの格子点が、内部または辺上に存在する。

2.
辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形には半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円が内接する。
半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ の円には辺の長さ 1 の正方形が内接し自由に回転することができる。

したがって、この正方形は辺が座標軸に平行なものが含まれ、(1) よりその内部には格子点が含まれる。
よって、辺の長さが $\sqrt{2}$ の任意の正方形には格子点が少なくとも一つ含まれる。
(Suggested by amase)

証明終了