京都大学　1971 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

関数 $f(x) = x^2 + ax + b$（a，b は実数）の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を m とする．不等式 $a + 2b \leqq 2$ を満足する a，b で，m を最大にするものを求めよ．

解答

$f(x) = x^2 + ax + b$ はしたに凸な 2 次関数なので全体としては $f'(x) = 0$ の点で最小値をとる。
$f'(x) = 2x + a$ なので $x = -a/2$ の点で最小となる。
したがって、$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で考える場合

$$
\begin{aligned}
-a/2 &< 0 \qquad (a > 0) && (1)\\
0 \leqq -a/2 &\leqq 1 \qquad (-2 \leqq a \leqq 0) && (2)\\
-a/2 &> 1 \qquad (a < -2) && (3)
\end{aligned}
$$

の 3 つの場合に分けられる。

(1) の場合
$x = 0$ において最小値 b をとる。
したがって $m = b$ であり、この範囲で m の最大値は
$b \leqq 1 - a/2$ より $m = 1 - a/2$
$a > 0$ より m が最大となるのは $a = 0$ のときで $m = 1$

(2) の場合
$x = -a/2$ のとき最小値 $(-a/2)^2 + a(-a/2) + b = -a^2/4 + b$ をとる。
このとき、最小値 $m = -a^2/4 + b$ が最大になる場合を考えると
b の係数は正なので、a が一つ決まったときの m の最大値は b が最大となるときに限るので
$b = 1 - a/2$ としたときに最大となる。
したがって、m の最大値のみを考える場合は $m = -a^2/4 - a/2 + 1$ として考えてもよい。
そのとき、$g(x) = -x^2/4 - x/2 + 1$ を考えると、この式は $g'(x) = -x/2 - 1/2 = 0 \to x = -1$ において最大となる。
そのときの最大値は $g(-1) = -(-1)^2/4 - (-1)/2 + 1 = -1/4 + 1/2 + 1 = 5/4$ よって m は $a = -1$ のときに最大値 $5/4$ をとる。

(3) の場合
$x = 1$ において最小値 $1 + a + b$ をとる。
$a < -2$ より、最小値 $1 + a + b < 1 + b - 2 = b - 1$ なので $a = -2$ のとき m は最大値 $b - 1 = 1$ をとる。
そのときの m の最大値は $m = 1$
以上よりすべての場合を比較して、m が最大となるのは、$m = 5/4$ となる

$$a = -1, b = \frac{3}{2}$$

の点となる。