京都大学　1971 年　入学試験　理系数学　問題 4

問題

xy 平面上の曲線 $y=\sqrt{|x^2-1|}$ と直線 $y=2$ とが囲む図形を x 軸のまわりに回転してえられる回転体の体積を求めよ.

解答

$y=\sqrt{|x^2-1|}$
$x^2<1 \to -1<x<1$ の範囲では $y=\sqrt{1-x^2} \to y^2=1-x^2 \to x^2+y^2=1$ となり、半径 1 の円の y 軸が正の部分となる。$x^2 \geqq 1$ では、$y=\sqrt{x^2-1} \to y^2=x^2-1$ となり
$x^2-1>4 \to |x|>\sqrt{5}$ において $y>2$ となるので
問題の曲線と直線が囲む図形は $-\sqrt{5} \leqq |x| \leqq \sqrt{5}$ の範囲となる。
したがって、求める体積は半径 2 高さ $2\sqrt{5}$ の円柱から
半径 1 の球と $1<x<\sqrt{5}$ の範囲で $y=\sqrt{x^2-1}$ を回転させた図形の 2 倍を引いたものとなる。
$1<x<\sqrt{5}$ の範囲で $y=\sqrt{x^2-1}$ を回転させた図形の体積は

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\sqrt{5}} \pi y^2\,dx \\
&=\int_1^{\sqrt{5}} (x^2-1)\pi\,dx \\
&=\left[\frac{\pi x^3}{3}-\pi x\right]_1^{\sqrt{5}} \\
&=\frac{\pi\sqrt{5}^3}{3}-\pi\sqrt{5}-\left(\frac{\pi 1^3}{3}-\pi 1\right) \\
&=\frac{\pi 5\sqrt{5}-3\sqrt{5}}{3}-\left(\frac{\pi 1^3}{3}-\pi 1\right) \\
&=\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{5}+1\right)
\end{aligned}$$

よって、全体の体積は
円柱の体積 $\pi r^2 h=\pi(2^2)(2\sqrt{5})=8\pi\sqrt{5}$ から球の体積 $\frac{4\pi}{3}$ と $\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{5}+1\right)$ の 2 倍を引いたもの
よって

$$\begin{aligned}
&8\pi\sqrt{5}-\pi\frac{4}{3}-2\left(\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{5}+1\right)\right) \\
&=\frac{24\pi\sqrt{5}-4\pi-4\pi\sqrt{5}+4\pi}{3} \\
&=\frac{20\pi\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}$$