京都大学　1971 年　入学試験　理系数学　問題 5

問題

半径 r の円に内接する正 n 角形の頂点を順次 A_1，A_2，$\cdots$，A_n とする．まず頂点 A_2 を中心とする半径 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1$ の円と辺 $\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2$ の延長（$\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_2}$ の方向）との交点を B_1 として扇形 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ をつくる．次に頂点 A_3 を中心とする半径 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1$ の円と辺 $\mathrm{A}_4\mathrm{A}_3$ の延長（$\overrightarrow{\mathrm{A}_4\mathrm{A}_3}$ の方向）との交点を B_2 として扇形 $\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2$ をつくる．順次このようにして n 個の扇形をつくる．さて，正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ の面積とこれら n 個の扇形の面積の総和を S_n で表すとき，

1. S_n を n，r を用いて表せ.
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ.

解答

正 n 角形の外角を t とすると $t = 2\pi/n$
同時に角辺をはさむ中心角も t に等しい。
半径 r の円に内接する正 n 角形の面積は
$\dfrac{nr^2 \sin t}{2} = nr^2 \sin(t/2) cos(t/2)$
正 n 角形の辺の長さを l とすると
$l = 2r\sin(t/2)$(中心角の 2 等分線と辺は直交するので)
$l^2 = 4r^2 \sin^2(t/2)$
k 番目の扇形は半径が kl で中心角が t なので
面積は $\pi(kl)^2/n = \pi k^2 l^2/n = 4\pi k^2 r^2 \sin^2(t/2)/n$
n 個の扇形の面積の和は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \pi k^2 l^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} 4\pi k^2 r^2 \sin^2(t/2)/n \\
&= \frac{4\pi r^2 \sin^2 \dfrac{\pi}{n}}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \right) \\
&= \frac{4\pi r^2 \sin^2 \dfrac{\pi}{n}}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \right) \\
&= \frac{4\pi r^2 \sin^2 \dfrac{\pi}{n}}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{1}{3} \left(2\pi r^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) (n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

面積の合計 S_n は $S_n = nr^2 \sin(\dfrac{\pi}{n}) cos(\dfrac{\pi}{n}) + \dfrac{1}{3} \left(2\pi r^2 \sin^2 \dfrac{\pi}{n} \right) (n+1)(2n+1)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(nr^2 \sin(\frac{\pi}{n}) cos(\frac{\pi}{n}) + \frac{1}{3} \left(2\pi r^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) (n+1)(2n+1) \right)$
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(nr^2 \sin(\frac{\pi}{n}) cos(\frac{\pi}{n}) \right) = \pi r^2$(円の面積)
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} \left(2\pi r^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) (n+1)(2n+1) \right) = \frac{2\pi r^2}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\sin^2 \frac{\pi}{n} \right) (2n^2 + 3n + 1)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\right)(2n^2+3n+1)=\lim_{n\to\infty}\left(2n^2\sin^2\frac{\pi}{n}+3n\sin^2\frac{\pi}{n}+\sin^2\frac{\pi}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\left(2n^2\sin^2\frac{\pi}{n}\right)=2\left(\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)\right)$

$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)=\pi$ より

$\lim_{n\to\infty}\left(2n^2\sin^2\frac{\pi}{n}\right)=2\pi^2$

$\lim_{n\to\infty}\left(3n\sin^2\frac{\pi}{n}\right)=3\left(\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\right)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)=0$ より

$\lim_{n\to\infty}\left(3n\sin^2\frac{\pi}{n}\right)=0$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sin^2\frac{\pi}{n}\right)=0$

以上より $\lim_{n\to\infty}S_n=\pi r^2+\frac{4\pi^3r^2}{3}=\frac{3+4\pi^2}{3}\pi r^2$