京都大学　1971 年　入学試験　理系数学　問題 6

## 問題

$xy$ 平面上に 2 つの動点 P，Q がある．P は点 $(1,0)$ から出発し，原点 O を中心とする半径 1 の円周上を正の向きに一定の速さ $\pi$（円周率）で回転する．Q は点 $(a,0)$ から出発し，$y$ 軸に平行な直線上を $y$ の増加方向に一定の速さ $v$ で進む．ただし，$0 < v < a\pi$ とする．

1. 出発時から測って，時刻 $n$ と $n+1$ との間で 3 点 O，P，Q が 1 直線上に並ぶ時刻 $t_n$ がただ 1 回あることを示せ．ただし，$n = 0$，1，2，$\cdots$ とする．
2. $n$ が増してゆくと，$t_n - n$ は一定値に近づくことを示せ．

## 解答

$x$ 軸の正の部分と $\overline{\mathrm{OP}}$ のなす角を $b$,
$x$ 軸の正の部分と $\overline{\mathrm{OQ}}$ のなす角を $c$ とする。
時刻 $t$ において $b = t\pi$
したがって, 点 P の座標 $(p_x, p_y)$ は
$(p_x, p_y) = (\cos t\pi, \sin t\pi)$
このときの Q の座標 $(q_x, q_y)$ は $(q_x, q_y) = (a, vt)$
Q が動く直線を L とする
1.
$n$ が偶数の時
$t = n$ の時の Q の座標は $(a, vn)$ P の座標は $(\cos n\pi, \sin n\pi) = (1, 0)$ $t = n + 1/2$ の時の Q の座標は $(a, v(n+1/2))$
そのときの角を $c$ とすると、$v(n+1/2) = a\ \tan\ c$
この時の角 $c$ は tan の定義から、$0 < c < \pi/2$
したがって、$n \leqq t \leqq n + 1/2$ の範囲で、$(t-n)\pi = c$ となる $t$ がある。
そのような $t$ を $t_e$ とする。
このとき、$f(t) = vt - a\ \tan\ \pi t$ を考えると
tan は周期 $2\pi$ の周期関数なので、$n$ は偶数より $\tan\ (t-n)\pi = \tan\ t\pi$
$f(t_e) = vt_e - a\ \tan\ t_e\pi = vt_e - a\ \tan\ (t_e - n)\pi = vt_e - v(n+1/2) = v(t_e - n + 1/2) < 0$
$f(n) = vn - a\, tan\ n\pi = vn > 0$
$f(t)$ は作り方から連続であるから $f(x) = 0$ となる $x$ が $n < x < t_e$ の範囲に存在する。
$f'(t) = v - a\pi \sec^2\ \pi t$
$sec^2\ \pi t \geqq 1$ より $f'(t) < 0$
よって、$f(t)$ は単調減少かつ、$f'(t) = 0$ となる点がないので、この範囲で、$f(x) = 0$ となる点は 1 つに限る。
以上より、OPQ が一直線上にならぶ $t_n$ が $n < t_n < n+1$ の間で 1 ただ 1 回ある。
$n$ が奇数のとき
$t = n$ の時の Q の座標は $(a, vn)$ P の座標は $(\cos n\pi, \sin n\pi) = (-1, 0)$ $t = n + 1/2$ の時の Q の座標は $(a, v(n+1/2))$
そのときの角を $c$ とすると、$v(n+1/2) = a\ \tan\ c$
この時の角 $c$ は tan の定義から、$0 < c < \pi/2$
$n$ は奇数なので、$n \leqq t \leqq n + 1/2$ の範囲で、$(t-n)\pi = c$ となる $t$ がある。
そのような $t$ を $t_e$ とする。

このとき、$f(t)=vt+a\ \tan\ \pi t$ を考えると

tan は周期 $2\pi$ の周期関数なので、$n$ は奇数より $\tan\,(t-n)\pi=-\tan\ t\pi$

$f(t_e)=vt_e+a\ \tan\ t_e\pi=vt_e-a\ \tan\,(t_e-n)\pi=vt_e-v(n+1/2)=v(t_e-n+1/2)<0$

となる。

$f(n)=vn>0$ なので、偶数の場合と同様、$f(x)=0$ となる点がただ一つある。

このとき、点 POQ の順で並んでいるが、１直線上に存在する。

以上より、OPQ が一直線上にならぶ $t_n$ が $n<t_n<n+1$ の間で 1 ただ 1 回ある。

2.

１直線上に並ぶ $t_n$ を考えると、前述の通り

$n$ が偶数の場合は

$\tan\,(t_n-n)\pi>vn$

$\lim_{n\to\infty} vn=\infty$ なので

$\lim_{n\to\infty} \tan\,(t_n-n)\pi=\infty$

このとき、$(t_n-n)\pi$ は、$\pi/2$ に近付く

よって、$t_n-n$ は $1/2$ に近付く

$n$ が奇数の場合も同様に

$\tan\,(t_n-n)\pi<-vn$

より、$(t_n-n)\pi$ は、$\pi/2$ に近付く

以上より、$n$ が大きくなると、$t_n-n$ は $\dfrac{1}{2}$ に近付く