京都大学　1972 年　入学試験　文系数学　問題 2

## 問題

3 次方程式 $x^3 - ax^2 + ax - \dfrac{a^2}{9} = 0$ が相異なる 3 実根をもつために，実数の定数 $a$ の満たすべき必要十分条件を求めよ．

## 解答

$x^3 - ax^2 + ax - \dfrac{a^2}{9} = 0$ が相異なる 3 実根をもつためには、
$y = x^3 - ax^2 + ax - \dfrac{a^2}{9}$ としたとき、
$f(x)$ と $x$ 軸との交点が、3 点存在することが必要十分。
$f(x)$ が $x$ 軸と 3 点で交わる為には、$f(x)$ が、2 カ所で極値を持ち、かつ、その極値の大きい方が正で、小さい方が負であることが必要十分。
よって、$f'(x) = 0$ が、二つの異なる実数を持ち、その時の $x$ の値において、
$f(x)$ が一方は正で、一方が負で有ることが必要十分
$f'(x) = 3x^2 - 2ax + a$ なので
$f'(x) = 0$ の解は $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 3a}}{3}$ なので、
この値がで実数かつ異なる為には、$a^2 - 3a > 0$ が必要かつ十分。
つまり、$a(a-3) > 0$ より、$a > 3$ または $a < 0$ のとき、異なる 2 実根をもつ。
これは 3 実根を持つためには必要。
そのときの $f(x)$ の値は、それぞれ

$$f\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 3a}}{3}\right) = -\frac{2(a-3)a(\sqrt{(a-3)a} + a)}{27} \tag{1}$$

$$f\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 3a}}{3}\right) = \frac{2(a-3)a(\sqrt{(a-3)a} - a)}{27} \tag{2}$$

$a > 3$ のとき、(1)$< 0$
しかし、(2) において $\sqrt{(a-3)a} - a < 0$ なので (2) $< 0$
したがって、極値はともに負となり、$f(x) = 0$ は 3 実根を持たない
次に $a < 0$ の場合
$\sqrt{(a-3)a} - a > 0$ より、(2)$> 0$
$(\sqrt{(a-3)a} + a)(\sqrt{(a-3)a} - a) = -3a > 0$
$(\sqrt{(a-3)a} - a) > 0$ より、$(\sqrt{(a-3)a} + a) > 0$
したがって、(1)$< 0$
よって、(1)$< 0$,(2)$> 0$ より 3 実根をもつ。
以上より、$a < 0$ において、$f'(x) = 0$ は異なる二つの解を持ち、それぞれの極値が正、負に別れるので $f(x) = 0$ を持つためには必要十分である。。
以上より $f(x) = 0$ が 3 実根を持つためには、$a < 0$ が必要十分