京都大学　1972 年　入学試験　文系数学　問題 3

問題

実数または複素数の x, y, z, a について，$x+y+z=a$, $x^3+y^3+z^3=a^3$ の 2 式が成立するとき，x, y, z のうちの少なくとも一つは a に等しいことを示せ.

解答

問題より

$$x+y+z=a \tag{1}$$
$$x^3+y^3+z^3=a^3 \tag{2}$$

なので
(1) の a を (2) に代入すると

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)^3$$

右辺を左辺に移項して展開すると

$$3yz^2+3xz^2+3y^2z+6xyz+3x^2z+3xy^2+3x^2y=0$$

左辺を因数分解すると

$$3(x+y)(z+x)(y+z)=0$$

$3, x, y, z$ はそれぞれ実数または複素数なのでその和である各項もまた実数または複素数
実数または複素数の積が 0 になるためにはそのうち少なくとも一つが 0 でなければならない。
したがって、$x+y=0$ または $y+z=0$ または $x+z=0$
よって、式 (1) に代入すると、

$$x+y=0 \to z=a$$
$$y+z=0 \to x=a$$
$$x+z=0 \to y=a$$

となり、x, y, z の少なくとも一つは a に等しい。