京都大学　1972 年　入学試験　文系数学　問題 4

問題

三角形 ABC の内部の 1 点 P を頂点とする 1 つの平行四辺形を PQRS とする．P から Q へ向かう半直線が三角形 ABC の周と交わる点を Q$'$ とし，R$'$，S$'$ も同様の点とする．
$\vec{\mathrm{PQ}} = a\vec{\mathrm{PQ}}'$，$\vec{\mathrm{PR}} = b\vec{\mathrm{PR}}'$，$\vec{\mathrm{PS}} = c\vec{\mathrm{PS}}'$
とおくとき，$a + c \geqq b$ が成立することを示せ．($\vec{\mathrm{PQ}}$ などはベクトルを表わす)

解答

a, b, c はそれぞれ点 P を始点とする半直線上の点なので、a, b, c は正
また、a, b, c のいずれか一つでも 0 となると、PQRS は四辺形にならないので、$a > 0, b > 0, c > 0$
PQRS は平行四辺形なので

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{PS}} = \overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

したがって、

$$a\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} + c\overrightarrow{\mathrm{PS'}} = b\overrightarrow{\mathrm{PR'}}$$

よって、

$$\overrightarrow{\mathrm{PR'}} = \frac{a\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} + c\overrightarrow{\mathrm{PS'}}}{b}$$

したがって、半直線 PR と辺 Q$'$S$'$ の交点は辺 Q$'$S$'$ 上にある。

点 Q$'$,S$'$ は三角形 ABC の辺上の点なので辺 Q$'$S$'$ は三角形 ABC の内部または辺上にある。
もし、点 R$'$ と点 P が直線 Q$'$S$'$ の上になく同じ側にあるとすると、
点 R$'$ は点 P は三角形 ABC の内部の点なので、三角形の辺上の点 Q$'$,S$'$ とつくる三角形 PQ$'$S$'$ の内部ある。
しかし、点 R$'$ は三角形 ABC の辺上の点なので、これは矛盾する。
したがって、点 R$'$ は直線 Q$'$S$'$ の上にあるか、P とは反対側に存在する。
よって、辺 Q$'$S$'$ 上の点 T への P からのベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}} = d\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} + (1 - d)\overrightarrow{\mathrm{PS'}} \ \ (0 < d < 1)$$

と表せるので

$$\overrightarrow{\mathrm{PR'}} = f\overrightarrow{\mathrm{PT}}$$

としたとき、$f \geqq 1$
となる。

$$\overrightarrow{\mathrm{PR'}} = f(d\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} + (1 - d)\overrightarrow{\mathrm{PS'}})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR'}} = \frac{a\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} + c\overrightarrow{\mathrm{PS'}}}{b}$$

より

$$f(d\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} + (1 - d)\overrightarrow{\mathrm{PS'}}) = \frac{a\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} + c\overrightarrow{\mathrm{PS'}}}{b}$$

両辺に b をかけて

$$fb(d\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} + (1-d)\overrightarrow{\mathrm{PS'}}) = a\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} + c\overrightarrow{\mathrm{PS'}}$$

$$(fbd-a)\overrightarrow{\mathrm{PQ'}} + (fb(1-d)-c)\overrightarrow{\mathrm{PS'}}) = 0$$

$\mathrm{PQ'}$ と $\mathrm{PS'}$ は同一直線ではないので、この式が成立するためには、$fbd-a=0, fb(1-d)-c=0$ でなければならない。

よって、

$$a = fbd, c = fb(1-d)$$

したがって、

$$a + c = fbd + fb(1-d) = fb$$

ここで $f \geqq 1$ なので、$fb \geqq b$

よって、$a + c \geqq b$