京都大学　1972 年　入学試験　文系数学　問題 5

問題

a，c を定数，t を媒介変数として次の式で表わされる xy 平面上の曲線がある．

$$\begin{cases} x = ca^t + t, & (a > 1) \\ y = ca^t - t & (t\ \text{はすべての実数値をとる}) \end{cases}$$

1. $c = 1$ のとき，この曲線の概形をえがけ．（座標軸を回転して考えよ）
2. 平面上のどのような点 (p, q) をあたえても，c を適当に選べば，上の曲線はこの点 (p, q) を通ることを示せ．

解答

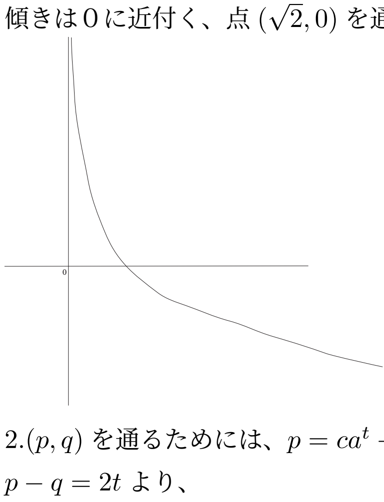
1.
座標軸を反時計方向に $\pi/4$ 回転させると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos -\pi/4 & -\sin -\pi/4 \\ \sin -\pi/4 & \cos -\pi/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(2ca^t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-2t) \end{pmatrix}$$

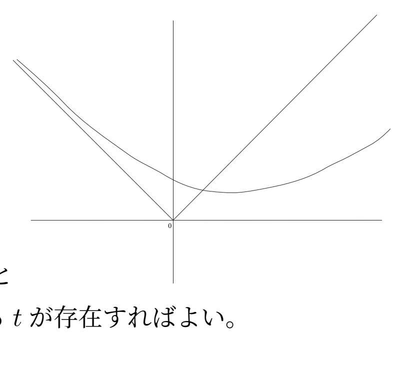
したがって、

$$(x', y') = (\sqrt{2}ca^t, -\sqrt{2}t)$$

$t \to -\infty$ において、$x' = 0$ に近付き、$t \to \infty$ において、$y = -\infty$ に発散するが
傾きは 0 に近付く、点 $(\sqrt{2}, 0)$ を通る曲線



座標軸をもとに戻すと



2.(p, q) を通るためには、$p = ca^t + t, q = ca^t - t$ となる t が存在すればよい。
$p - q = 2t$ より、

$$t = \frac{p-q}{2}$$

となる t を定めると
$p = ca^{((p-q)/2)} + (p-q)/2$

となるのでこのときの c を $c = \dfrac{(p+q)/2}{a^{((p-q)/2)}}$ とすれば

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{p+q}{2a^{(p-q)/2}}a^{(p-q)/2} + \frac{p-q}{2} \\
&= \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} \\
&= \frac{p-q-p-q}{2} \\
&= q
\end{aligned}
$$

となり、成立する。

よって、任意の (p,q) について、適当な値 c をとれば、曲線は (p,q) を通る。