京都大学　1972 年　入学試験　文系数学　問題 6

問題

$9u_{n+1} = (10 - {u_n}^2)u_n$（$n = 1, 2, \cdots$）で定められる数列 u_n がある．いま，$0 < u_1 < \dfrac{3}{2}$ と仮定するとき次のことを示せ．

1. すべての n について，$0 < u_n < \dfrac{3}{2}$
2. $u_1 > u_2$ ならばすべての n について $u_n > u_{n+1}$，$u_1 < u_2$ ならばすべての n について $u_n < u_{n+1}$

解答

$u_{n+1} = (10 - {u_n}^2)u_n/9$

1.

u_{k-1} で成立すると仮定すると、

$u_k = (10 - {u_{k-1}}^2)u_{k-1}/9$

${u_{k-1}}^2 < \dfrac{9}{4}$ より

$10 - \dfrac{9}{4} < 10 - {u_{k-1}}^2$

$0 < u_{k-1}$ より

$(10 - \dfrac{9}{4})u_{k-1} < (10 - {u_{k-1}}^2)u_{k-1}$

$(10 - \dfrac{9}{4})u_{k-1}/9 < (10 - {u_{k-1}}^2)u_{k-1}/9$

$(10 - \dfrac{9}{4}) > 0$ より、

$(10 - \dfrac{9}{4})u_{k-1}/9 > 0$

よって

$0 < \dfrac{(10 - {u_{k-1}}^2)u_{k-1}}{9}$

また、$f(x) = (10 - x^2)x/9$ を考えると

$f'(x) = (10 - 3x^2)/9$ $f'(x) = 0$ となるのは、$x = \pm\sqrt{10/3}$

$10/3 > 9/4$ より $\sqrt{10/3} > 3/2$

したがって、$0 < x < 3/2$ の範囲では、$f'(x)$ は正

よって、$f(x)$ は単調増加なので、$0 < x < 3/2$ の区間では、$x = 3/2$ の点で最大となり、

その値は、$(10 - (3/2)^2)(3/2)/9 = 31/24$

$31/24 < 3/2$ より、$f(x) < 3/2$

よって、$\dfrac{(10 - {u_{k-1}}^2)u_{k-1}}{9} < \dfrac{3}{2}$

$n = 1$ で成立し、$n = k - 1$ で成立すると仮定すると、$n = k$ で成立するので、数学的帰納法より、すべての n において成立する。

2.

$d_k = u_k - u_{k-1}$ を考える。

$u_k = (10 - {u_{k-1}}^2)u_{k-1}/9$ より

$$
\begin{aligned}
d_k &= \frac{(10-{u_{k-1}}^2)u_{k-1}}{9} - u_{k-1} \\
&= \frac{(10-{u_{k-1}}^2)u_{k-1} - 9u_{k-1}}{9} \\
&= \frac{(1-{u_{k-1}}^2)u_{k-1}}{9}
\end{aligned}
$$

$g(x) = (1-x^2)x/9$ を考えると

$g'(x) = (1-3x^2)/9$

$g'(x) = 0$ となるのは $x = \pm\sqrt{1/3}$ で、

$0 < x < 3/2$ の範囲では、$x = \sqrt{1/3}$ のとき、

よって、$g(x)$ は $0 < x < \sqrt{1/3}$ の範囲で単調増加、$\sqrt{1/3} < x < 3/2$ で単調減少となる。

また、$g(x) = 0$ となるのは、$x = \pm 1, 0$ なので、$g(0) = 0$ より、

$0 < x < 1$ の範囲で、g(x) は正

$1 < x < 3/2$ の範囲で、g(x) は負

つまり、u_k が $0 < x < 1$ の範囲にあるときは、$u_{k+1} > u_k$

u_k が $1 < x < 3/2$ の範囲にあるときは、$u_{k+1} < u_k$

$0 < u_{k-1} < 1$ ならば、前の通り、$f(x)$ は $x = 1$ で最大となり、その値は、$f(1) = 1$

帰納法より $u_n < 1$

したがって、上述の通り、$u_{n+1} > u_n$

また $1 < u_{k-1} < 3/2$ ならば $f(x)$ は $x = 1$ で最小となり、

その値は、$f(1) = 1$ なので、帰納法より $u_n > 1$

上述の通り、$u_{n+1} < u_n$

以上より

$u_2 > u_1$ ならば、上述の通り、$d_2 > 0$ より、

$\dfrac{(1-{u_1}^2)u_1}{9} > 0$

$u_1 > 0, 9 > 0$ より

$1 - {u_1}^2 > 0$

$1 > {u_1}^2$

$u_1 > 0$ なので $1 > u_1$

よって、$0 < u_1 < 1$

また

$u_2 > u_1$ ならば、上述の通り、$d_2 < 0$ より、

$\dfrac{(1-{u_1}^2)u_1}{9} < 0$

$u_1 > 0, 9 > 0$ より

$1 - {u_1}^2 < 0$

$1 < {u_1}^2$

$u_1 > 0$ なので $1 < u_1$

よって、$1 < u_1 < 3/2$

以上より

$u_2 > u_1$ ならば $0 < u_1 < 1$ で、$u_{n+1} > u_n$

$u_2 < u_1$ ならば $1 < u_1 < 3/2$ で、$u_{n+1} < u_n$

となる。