京都大学　1972 年　入学試験　理系数学　問題 1

問題

2 つまたは 3 つのベクトルの加法ついて，次の法則が成立する．
$\vec{\mathrm{A}}+\vec{\mathrm{B}}=\vec{\mathrm{B}}+\vec{\mathrm{A}}$，$(\vec{\mathrm{A}}+\vec{\mathrm{B}})+\vec{\mathrm{C}}=\vec{\mathrm{A}}+(\vec{\mathrm{B}}+\vec{\mathrm{C}})$
いま，n 個のベクトルを $\vec{\mathrm{A}_1}$，$\vec{\mathrm{A}_2}$，$\cdots$，$\vec{\mathrm{A}_n}$ とし，その順序を任意にかえたものを $\vec{\mathrm{B}_1}$，$\vec{\mathrm{B}_2}$，$\cdots$，$\vec{\mathrm{B}_n}$ とする．
上の 2 つの法則だけをつかって，
$\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_2}+\cdots+\vec{\mathrm{A}_n}=\vec{\mathrm{B}_1}+\vec{\mathrm{B}_2}+\cdots+\vec{\mathrm{B}_n}$
が成り立つことを数学的帰納法で示せ．なお，なお，たとえば 4 つのベクトル $\vec{\mathrm{A}}$，$\vec{\mathrm{B}}$，$\vec{\mathrm{C}}$，$\vec{\mathrm{D}}$ について，その和 $\vec{\mathrm{A}}+\vec{\mathrm{B}}+\vec{\mathrm{C}}+\vec{\mathrm{D}}$ は $\{(\vec{\mathrm{A}}+\vec{\mathrm{B}})+\vec{\mathrm{C}}\}+\vec{\mathrm{D}}$ を意味するとし，一般の場合も同様とする．

解答

任意の置換はとなりあう二つの互換の積に分解される。
証明終了。
$\vec{\mathrm{A}}+\vec{\mathrm{B}}=\vec{\mathrm{B}}+\vec{\mathrm{A}}$ を法則 1
$(\vec{\mathrm{A}}+\vec{\mathrm{B}})+\vec{\mathrm{C}}=\vec{\mathrm{A}}+(\vec{\mathrm{B}}+\vec{\mathrm{C}})$ を法則 2 とする。
$n=2$ の場合

$$\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_2}=\vec{\mathrm{B}_1}+\vec{\mathrm{B}_2}$$

は法則 1 から正しい。

$n=3$ の場合

$$\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_2}+\vec{\mathrm{A}_3}=\vec{\mathrm{B}_1}+\vec{\mathrm{B}_2}+\vec{\mathrm{B}_2}$$

$\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_2}+\vec{\mathrm{A}_3}$ の並び変えの種類を尽くすと
以下の 6 通りとなる。
$\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_2}+\vec{\mathrm{A}_3}$
$\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_3}+\vec{\mathrm{A}_2}$
$\vec{\mathrm{A}_2}+\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_3}$
$\vec{\mathrm{A}_2}+\vec{\mathrm{A}_3}+\vec{\mathrm{A}_1}$
$\vec{\mathrm{A}_3}+\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_2}$
$\vec{\mathrm{A}_3}+\vec{\mathrm{A}_2}+\vec{\mathrm{A}_1}$
$\vec{\mathrm{B}_1}+\vec{\mathrm{B}_2}+\vec{\mathrm{B}_2}$ は以上のどれかと一致するのでそれぞれが $\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_2}+\vec{\mathrm{A}_3}$ と等しいことをいえれば十分である。

$$\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_2}+\vec{\mathrm{A}_3}=\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_2}+\vec{\mathrm{A}_3}$$

は自明

$$
\begin{aligned}
&\vec{A_1}+\vec{A_3}+\vec{A_2}\\
&=(\vec{A_1}+\vec{A_3})+\vec{A_2}(\text{定義より})\\
&=\vec{A_1}+(\vec{A_3}+\vec{A_2})(\text{法則 2 より})\\
&=\vec{A_1}+(\vec{A_2}+\vec{A_3})(\text{法則 1 より})\\
&=(\vec{A_1}+\vec{A_2})+\vec{A_3}(\text{法則 2 より})\\
&=\vec{A_1}+\vec{A_2}+\vec{A_3}(\text{定義より})
\end{aligned}
$$

以下同様に

$$
\begin{aligned}
&\vec{A_2}+\vec{A_1}+\vec{A_3}\\
&=(\vec{A_2}+\vec{A_1})+\vec{A_3}\\
&=(\vec{A_1}+\vec{A_2})+\vec{A_3}\\
&=\vec{A_2}+\vec{A_1}+\vec{A_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vec{A_2}+\vec{A_3}+\vec{A_1}\\
&=(\vec{A_2}+\vec{A_3})+\vec{A_1}\\
&=\vec{A_2}+(\vec{A_3}+\vec{A_1})\\
&=\vec{A_2}+(\vec{A_1}+\vec{A_3})\\
&=(\vec{A_2}+\vec{A_1})+\vec{A_3}\\
&=(\vec{A_1}+\vec{A_2})+\vec{A_3}\\
&=\vec{A_1}+\vec{A_2}+\vec{A_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vec{A_3}+\vec{A_1}+\vec{A_2}\\
&=(\vec{A_3}+\vec{A_1})+\vec{A_2}\\
&=(\vec{A_1}+\vec{A_3})+\vec{A_2}\\
&=\vec{A_1}+(\vec{A_3}+\vec{A_2})\\
&=\vec{A_1}+(\vec{A_2}+\vec{A_3})\\
&=(\vec{A_1}+\vec{A_2})+\vec{A_3}\\
&=\vec{A_1}+\vec{A_2}+\vec{A_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\vec{A_3}+\vec{A_2}+\vec{A_1}\\
&=(\vec{A_3}+\vec{A_2})+\vec{A_1}\\
&=(\vec{A_2}+\vec{A_3})+\vec{A_1}\\
&=\vec{A_2}+(\vec{A_3}+\vec{A_1})\\
&=\vec{A_2}+(\vec{A_1}+\vec{A_3})\\
&=(\vec{A_2}+\vec{A_1})+\vec{A_3}\\
&=(\vec{A_1}+\vec{A_2})+\vec{A_3}\\
&=\vec{A_1}+\vec{A_2}+\vec{A_3}
\end{aligned}
$$

以上より $n=3$ の場合も成立する。

$n \leqq k$ の場合正しいと仮定すると
$\vec{A_1}+\vec{A_2}+\cdots+\vec{A_k}=\vec{B_1}+\vec{B_2}+\cdots+\vec{B_k}$

が成り立つ。
このとき $\vec{A_{k+1}}$ を追加して、任意に並べかえたものを $\vec{B_1}$，$\vec{B_2}$，$\cdots$，$\vec{B_{k+1}}$ とする。
そのとき、$\vec{A_{k+1}}$ が $\vec{B_l}$ $(1 \leqq l \leqq k+1)$ となったとする。
$l=1$ のときは、

$$\begin{aligned}
&\vec{B_1}+\vec{B_2}+\cdots+\vec{B_l}+\cdots+\vec{B_k}+\vec{B_{k+1}}\\
&=\vec{B_1}+(\vec{B_2}+\cdots+\vec{B_l}+\cdots+\vec{B_k}+\vec{B_{k+1}})\\
&=(\vec{B_2}+\cdots+\vec{B_l}+\cdots+\vec{B_k}+\vec{B_{k+1}})+\vec{B_1}
\end{aligned}$$

$l=1$ より $\vec{B_1}=\vec{A_{k+1}}$ なので
括弧内は、$\vec{A_{k+1}}$ 以外の k 個を並べ変えた和となり、
前提より $\vec{A_1}+\vec{A_2}+\cdots+\vec{A_k}$ に等しい
したがって、$n=k+1$ のとき成り立つ。
$l=k+1$ の場合は、

$$\begin{aligned}
&\vec{B_1}+\vec{B_2}+\cdots+\vec{B_k}+\vec{B_{k+1}}\\
&=(\vec{B_1}+\vec{B_2}+\cdots+\vec{B_k})+\vec{B_{k+1}}\\
&=(\vec{B_1}+\vec{B_2}+\cdots+\vec{B_k})+\vec{A_{k+1}}\\
&=(\vec{A_1}+\vec{A_2}+\cdots+\vec{A_k})+\vec{A_{k+1}}\\
&=\vec{A_1}+\vec{A_2}+\cdots+\vec{A_k}+\vec{A_{k+1}}
\end{aligned}$$

となり、成立する。

$1<l<k+1$ のとき、

$$\begin{aligned}
&\vec{B_1}+\vec{B_2}+\cdots+\vec{B_l}+\cdots+\vec{B_k}+\vec{B_{k+1}}\\
&=\vec{A_1}+\vec{A_2}+\cdots+\vec{A_k}+\vec{A_{k+1}}
\end{aligned}$$

$l=k+1$

$$\begin{aligned}
&\vec{B_1}+\vec{B_2}+\cdots+\vec{B_l}+\cdots+\vec{B_k}+\vec{B_{k+1}}\\
&=(((((\vec{B_1}+\vec{B_2})+\cdots)+\vec{B_l})+\cdots)+\vec{B_k})+\vec{B_{k+1}}(\text{定義より})\\
&=((((\vec{B_1}+\vec{B_2})+\cdots)+\vec{B_l})+\cdots)+(\vec{B_k}+\vec{B_{k+1}})(\text{法則 2 より})\\
&=(((\vec{B_1}+\vec{B_2})+\cdots)+\vec{B_l})+(\cdots+(\vec{B_k}+\vec{B_{k+1}}))(\text{くりかえし})\\
&=((\vec{B_1}+\vec{B_2})+\cdots)+\vec{B_l}+(\cdots+(\vec{B_k}+\vec{B_{k+1}}))\ \text{定義より})
\end{aligned}$$

この式を以下の様に三つの部分に分けて考える。
$(\vec{B_1}+\vec{B_2}+\cdots)+\vec{B_l}+(\cdots+\vec{B_{k+1}})$
各括弧の中をそれぞれ
$\vec{B_1}+\vec{B_2}+\cdots+\vec{B_{l-1}}=\vec{L}$
$\vec{B_{l+1}}+\cdots+\vec{B_{k+1}}=\vec{R}$
とおくと
$n=3$ のとき成り立つので
$\vec{L}+\vec{B_l}+\vec{R}=\vec{L}+\vec{R}+\vec{B_l}$
$\vec{L}+\vec{R}$ は $\vec{A_1}$ から $\vec{A_k}$ の k 個のベクトルを入れ換えた和なので
前提より $\vec{A_1}+\vec{A_2}+\cdots+\vec{A_k}$ に等しい。

したがって、$(\vec{\mathrm{B}_1}+\vec{\mathrm{B}_2}+\cdots)+\vec{\mathrm{B}_l}+(\cdots+\vec{\mathrm{B}_{k+1}})=\vec{\mathrm{A}_1}+\vec{\mathrm{A}_2}+\cdots+\vec{\mathrm{A}_k}+\vec{\mathrm{A}_{k+1}}$

よって、$n=k+1$ のときも成り立つ。
以上より、数学的帰納法により、任意の n について、成り立つ。