京都大学　1972 年　入学試験　理系数学　問題 4

問題

三角形 ABC の内部の 1 点 P を頂点とする 1 つの平行四辺形を PQRS とする．P から Q へ向かう半直線が三角形 ABC の周と交わる点を Q' とし，R'，S' も同様の点とする．
$\vec{\mathrm{PQ}} = a\vec{\mathrm{PQ}'}$，$\vec{\mathrm{PR}} = b\vec{\mathrm{PR}'}$，$\vec{\mathrm{PS}} = c\vec{\mathrm{PS}'}$
とおくとき，$a + c \geqq b$ が成立することを示せ．（$\vec{\mathrm{PQ}}$ などはベクトルを表わす）

解答

a, b, c はそれぞれ点 P を始点とする半直線上の点なので、a, b, c は正
また、a, b, c のいずれか一つでも 0 となると、PQRS は四辺形にならないので、$a > 0, b > 0, c > 0$
PQRS は平行四辺形なので

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{PS}} = \overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

したがって、

$$a\overrightarrow{\mathrm{PQ}'} + c\overrightarrow{\mathrm{PS}'} = b\overrightarrow{\mathrm{PR}'}$$

よって、

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}'} = \frac{a\overrightarrow{\mathrm{PQ}'} + c\overrightarrow{\mathrm{PS}'}}{b}$$

したがって、半直線 PR と辺 $\mathrm{Q}'\mathrm{S}'$ の交点は辺 $\mathrm{Q}'\mathrm{S}'$ 上にある。

点 Q',S' は三角形 ABC の辺上の点なので辺 $\mathrm{Q}'\mathrm{S}'$ は三角形 ABC の内部または辺上にある。
もし、点 R' と点 P が直線 $\mathrm{Q}'\mathrm{S}'$ の上になく同じ側にあるとすると、
点 R' は点 P は三角形 ABC の内部の点なので、三角形の辺上の点 Q',S' とつくる三角形 $\mathrm{PQ}'\mathrm{S}'$ の内部ある。
しかし、点 R' は三角形 ABC の辺上の点なので、これは矛盾する。
したがって、点 R' は直線 $\mathrm{Q}'\mathrm{S}'$ の上にあるか、P とは反対側に存在する。
よって、辺 $\mathrm{Q}'\mathrm{S}'$ 上の点 T への P からのベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{PT}} = d\overrightarrow{\mathrm{PQ}'} + (1-d)\overrightarrow{\mathrm{PS}'} \quad (0 < d < 1)$$

と表せるので

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}'} = f\overrightarrow{\mathrm{PT}}$$

としたとき、$f \geqq 1$
となる。

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}'} = f(d\overrightarrow{\mathrm{PQ}'} + (1-d)\overrightarrow{\mathrm{PS}'})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}'} = \frac{a\overrightarrow{\mathrm{PQ}'} + c\overrightarrow{\mathrm{PS}'}}{b}$$

より

$$f(d\overrightarrow{\mathrm{PQ}'} + (1-d)\overrightarrow{\mathrm{PS}'}) = \frac{a\overrightarrow{\mathrm{PQ}'} + c\overrightarrow{\mathrm{PS}'}}{b}$$

両辺に b をかけて

$$fb(d\overrightarrow{\mathrm{PQ}'} + (1-d)\overrightarrow{\mathrm{PS}'}) = a\overrightarrow{\mathrm{PQ}'} + c\overrightarrow{\mathrm{PS}'}$$

$$(fbd - a)\overrightarrow{\mathrm{PQ}'} + (fb(1-d) - c)\overrightarrow{\mathrm{PS}'}) = 0$$

PQ' と PS' は同一直線ではないので、この式が成立するためには、$fbd - a = 0, fb(1-d) - c = 0$ でなければならない。

よって、

$$a = fbd, c = fb(1-d)$$

したがって、

$$a + c = fbd + fb(1-d) = fb$$

ここで $f \geqq 1$ なので、$fb \geqq b$

よって、$a + c \geqq b$