京都大学　1972 年　入学試験　理系数学　問題 6

問題

n 枚のカードがあり，それぞれのカードには a_1，a_2，$\cdots$，a_n という数字が記入されている．これをよく混ぜて無作為（任意）に 1 枚のカードを取り出すとき，それに記入された数の期待値（平均値）を E とする．また，同時に 2 枚のカードを取り出すとき，記入された 2 数の和の期待値（平均値）を F とすれば，$F = 2E$ となることを示せ．（$n \geqq 2$）

解答

$a_1, \cdots, a_n$ から 1 枚引くときの期待値は

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{1}$$

1 枚目が $a_k (1 \leq k \leq n)$ だった場合の 2 枚目のカードの期待値を E_2 とおくと

$$E_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n-1}(i \neq k) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_{k+1} + \cdots + a_n}{n-1} \tag{2}$$

したがって、1 枚目が a_k だった時の 2 枚の合計の期待値は

$$a_k + E_2 = a_k + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_{k+1} + \cdots + a_n}{n-1} \tag{3}$$

よって、2 枚のカードの合計の期待値は

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n}{n-1} \right)}{n} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} nF = a_1 + \frac{a_2 + \cdots + a_n}{n-1} &+ \\ a_2 + \frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_n}{n-1} &+ \\ a_n + \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} & \\ = a_1 + \cdots + a_n &+ \\ \frac{(a_2 + \cdots + a_n) + (a_1 + a_3 + \cdots + a_n) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_{n-1})}{n-1} & \end{aligned}$$

このとき $a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n$ は

$i = 1$ から $i = n$ のすべての場合をわたるから a_k はそれぞれ 1 回ずつ式に現れない。

つまり a_k は $n-1$ 回現れるので

$$\begin{aligned} nF &= nE + \frac{a_1(n-1) + a_2(n-1) + \cdots + a_n(n-1)}{n-1} \\ &= nE + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} F &= E + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \\ &= E + E \\ &= 2E \end{aligned}$$