京都大学　1972 年　入学試験　理系数学　問題 6

問題

n 枚のカードがあり，それぞれのカードには a_1，a_2，$\cdots$，a_n という数字が記入されている．これをよく混ぜて無作為（任意）に 1 枚のカードを取り出すとき，それに記入された数の期待値（平均値）を E とする．また，同時に 2 枚のカードを取り出すとき，記入された 2 数の和の期待値（平均値）を F とすれば，$F = 2E$ となることを示せ．（$n \geqq 2$）

解答

$a_1, \cdots, a_n$ から 1 枚引くときの期待値は

$$E = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \tag{1}$$

2 枚連続で引く場合の考えられる 2 枚の組合せは

$(a_1, a_2), (a_1, a_3), \cdots, (a_i, a_1), \cdots, (a_i, a_{i-1}), (a_i, a_{i+1}), \cdots, (a_i, a_n), \cdots, (a_{n-1}, a_n)$

となる。

当然このときの和は

$a_1 + a_2, a_1 + a_3, \cdots, a_i + a_1, \cdots, a_i + a_{i-1}, a_i + a_{i+1}, \cdots, a_i + a_n, \cdots, a_{n-1} + a_n$

となる。

したがって、全ての組合せの和 S_2 は

$S_2 = (a_1 + a_2) + (a_1 + a_3) + \cdots + (a_i + a_1) + \cdots + (a_i + a_{i-1}) + (a_i + a_{i+1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_n)$

となる。

この和を順序を入れ換えて整理すると

$$\begin{aligned} S_2 = {} & (n-1)a_1 + (n-1)a_2 + \cdots + (n-1)a_n \\ & + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ & + a_1 + a_3 + \cdots + a_n \\ & + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ & \quad \vdots \\ & + a_1 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_n \\ & \quad \vdots \\ & + a_1 + \cdots + a_{n-2} + a_n \\ & + a_1 + \cdots + a_{n-1} \end{aligned}$$

2 行目以降各 a_1 は $n-1$ 回現れるので

$$\begin{aligned} S_2 = {} & (n-1)a_1 + (n-1)a_2 + \cdots + (n-1)a_n \\ & + (n-1)a_1 + (n-1)a_2 + \cdots + (n-1)a_n \end{aligned}$$

したがって

$$S_2 = 2(n-1)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \tag{2}$$

また全ての組合せの数 P は n 枚から 2 枚取り出す順列なので

$$P = {}_n\mathrm{P}_2 = n(n-1) \tag{3}$$

期待値 F は

$$
\begin{aligned}
F &= S_2/P \\
&= \frac{2(n-1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n(n-1)} \\
&= 2\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}
\end{aligned}
$$

(1) より、

$$F = 2E \tag{4}$$

証明終了