京都大学　1973 年　入学試験　文系数学　問題 2

問題

p，q，r は実数とする．3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ において，一根が 1 で，他の二根はその絶対値がいずれも 1 であるための必要十分条件を求めよ．

解答

１根が１なので、$x^3+px^2+qx+r=0$ に $x=1$ を代入してもこの式は成立する。したがって

$$1+p+q+r=0 \tag{1}$$

残りの２根を a,b とすると
この式は

$$(x-1)(x-a)(x-b)=0 \tag{2}$$

と因数分解される。
この式を展開すると

$$x^3-bx^2-ax^2-x^2+abx+bx+ax-ab \tag{3}$$

となるので、各次数の係数をまとめると２次の係数が $-(b+a+1)$
１次の係数が $ab+a+b$
定数項が $-ab$
となる
これらが p,q,r に一致するのでまた (1) から $r=-(p+q+1)$ なので

$$\begin{aligned} p&=-(b+a+1)\\ q&=ab+a+b\\ p+q+1&=ab \end{aligned}$$

となる。
そこで a,b について解くと

$$a+b=-(p+1) \tag{4}$$

$$ab=p+q+1 \tag{5}$$

(4) から

$$b=-(a+p+1) \tag{6}$$

(6) を (5) に代入して

$$-a(a+p+1)=p+q+1 \tag{7}$$

整理すると

$$a^2+pa+a+p+q+1=0 \tag{8}$$

a について解くと

$$\left[a=-\frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}+p+1}{2}, a=\frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}-p-1}{2}\right] \tag{9}$$

a を (6) に代入して

$$\left[b = \frac{\sqrt{-4q + p^2 - 2p - 3} - p - 1}{2}, b = -\frac{\sqrt{-4q + p^2 - 2p - 3} + p + 1}{2}\right] \tag{10}$$

a, b は対等なので a と b はこの二つの解のそれぞれになる。

この平方根の中の正負で分けて考える。

負の場合

p, q は実数なのでこの解が複素数になるのは、平方根の中が負になる場合に限る

その場合、実部は $-(p+1)/2$、虚部は $\pm(\sqrt{-4q + p^2 - 2p - 3})/2$ となるので a, b は互いに共役となる。

またこの絶対値は

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\sqrt{(} - 4q + p^2 - 2p - 3)/2\right)^2 + ((p+1)/2)^2} \\
&= \sqrt{(4q - p^2 + 2p + 3 + p^2 + 2p + 1)/4} \\
&= \sqrt{(4p + 4q + 4)/4} \\
&= \sqrt{p + q + 1}
\end{aligned}$$

$(-4q + p^2 - 2p - 3 < 0$ より $\left(\sqrt{(-4q + p^2 - 2p - 3)}/2\right)^2 = 4q - p^2 + 2p + 3)$

この値が 1 である必要があるから

$$\begin{aligned}
\sqrt{p + q + 1} &= 1 \\
p + q + 1 &= 1 \\
p + q &= 0
\end{aligned}$$

平方根の中が正の場合

a, b ともに正とはならないので一方が 1 他方が-1 となる。

$$\frac{\sqrt{-4q + p^2 - 2p - 3} - p - 1}{2} = 1 \tag{11}$$

のを場合考えると

$$\begin{aligned}
\sqrt{-4q + p^2 - 2p - 3} - p - 1 &= 2 \\
\sqrt{-4q + p^2 - 2p - 3} &= p + 3 \\
-4q + p^2 - 2p - 3 &= (p+3)^2 \\
-4q + p^2 - 2p - 3 &= p^2 + 6p + 9 \\
4\,(q + 2p + 3) &= 0 \\
q + 2p &= -3
\end{aligned}$$