京都大学　1973年　入学試験　文系数学　問題3

問題

底辺の長さが a cm，その辺に対する頂角の大きさが $\theta°$ $(0 < \theta < 180)$ であるような三角形の面積の数値全体の集合を $S(a, \theta)$ で表わす．
いま

$$0 < a_1 \leqq a_2,\quad 0 < \theta_2 \leqq \theta_1 < 180$$

であるとき，$S(a_1, \theta_1)$ と $S(a_2, \theta_2)$ の包含関係をしらべよ．
とくに等しくなるのはどのような場合か．

解答

底辺と頂角が一定の三角形の頂点は、底辺を弦とする円周上にあるので面積が最小となるのは、頂点が底辺の端点と一致したときで 0
面積が最大となるのは、頂点が底辺の垂直二等分線上に位置する場合で、その面積は、

$$\frac{a^2}{4\tan\theta/2}$$

したがって、

$$S(a, \theta) = \left(x | 0 < x < \frac{a^2}{4\tan\theta/2}\right)$$

よって、$0 < a_1 \leqq a_2,\quad 0 < \theta_2 \leqq \theta_1 < 180$ より
$0 < \theta_2/2 \leqq \theta_1/2 < 90$
tan はこの範囲で、単調増加なので、$\tan\theta_2/2 \leqq \tan\theta_1/2$
したがって、
$\dfrac{1}{\tan\theta_2/2} \geqq \dfrac{1}{\tan\theta_1/2}$
よって、$\dfrac{{a_2}^2}{4\tan\theta_2/2} \geqq \dfrac{{a_1}^2}{4\tan\theta_1/2}$
以上より、

$$S(a_1, \theta_1) \subset S(a_2, \theta_2)$$

また、この集合が一致するのは
$\dfrac{{a_2}^2}{4\tan\theta_2/2} = \dfrac{{a_1}^2}{4\tan\theta_1/2}$
のときなので、${a_2}^2(4\tan\theta_1/2) = {a_1}^2(4\tan\theta_2/2)$

$$\frac{\tan\theta_1/2}{\tan\theta_2/2} = \frac{{a_1}^2}{{a_2}^2}$$