京都大学　1973 年　入学試験　文系数学　問題 4

問題

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は平面上の単位ベクトルで，どの二つも 120° の角をなすものとする．このとき，この平面上の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して

1. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=0$ が成り立つことを示せ.
2. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})^2+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})^2+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})^2$ の値を $\boldsymbol{x}$ の大きさ l を用いて表わせ.

ただし，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ などはベクトルの内積を表わす.

解答

座標軸を $\boldsymbol{a}$ が原点からのベクトルとし、x 軸の正の方向に一致する様にとる。
そのとき、反時計周りの角度を正とする。
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角が 120° なので、$\boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{a}$ を正の方向に 120° 回転させたものとすると、$\boldsymbol{c}$ は、負の方向に 120° 回転させたものとなる。
でなければ、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が一致してしまい、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が 120° の角をなさなくなってしまう。
また、$\boldsymbol{c}$ は、負の方向に 120° 回転させたものとすると、たしかに $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は 120° の角をなす。
このとき、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は単位行列なのでそれぞれは
$\boldsymbol{a}=(1,0)$
$\boldsymbol{b}=(-1/2,\sqrt{3}/2)$
$\boldsymbol{c}=(-1/2,-\sqrt{3}/2)$
となる。
このとき、$\boldsymbol{x}=(x,y)$ とすると
1.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}\\
&\ =\ (1\cdot x+0\cdot y)+(-1/2x+\sqrt{3}/2y)+(-1/2x-\sqrt{3}/2y)\\
&\ =\ 1\cdot x-1/2x-1/2x+\sqrt{3}/2y+-\sqrt{3}/2y\\
&\ =0
\end{aligned}$$

となり、なりたつ。
2.
l は $\boldsymbol{x}$ の大きさなので $l^2=x^2+y^2$

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})^2+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x})^2+(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x})^2\\
&=(1\cdot x+0\cdot y)^2+(-1/2x+\sqrt{3}/2y)^2+(-1/2x-\sqrt{3}/2y)^2\\
&=x^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}xy+\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{2}xy+\frac{3}{4}y^2\\
&=x^2(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+y^2(\frac{3}{4}+\frac{3}{4})\\
&=x^2\frac{3}{2}+y^2\frac{3}{2}\\
&=\frac{3}{2}(x^2+y^2)\\
&=\frac{3}{2}l^2
\end{aligned}
$$

以上より、

$$\frac{3}{2}l^2$$