京都大学　1973 年　入学試験　文系数学　問題 5

## 問題

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ において，$f(0) > 0$ とし，この関数のグラフは点 $(1, 1)$ および $(3, 5)$ を通るものとする．このとき $f(x)$ の最小値を最大にするような $a$，$b$，$c$ の値を求めよ．

## 解答

$f(0) > 0$ より、$f(0) = c > 0$
$(1, 1)$ と $(3, 5)$ を通るので
$f(1) = 1$ かつ $f(3) = 5$
$f(1) = a + b + c = 1$
$f(3) = 9a + 3b + c = 5$
もし $a = 0$ であった場合
$f(x) = bx + c$ となり、$f(x)$ は最小値がない
また、$a < 0$ の場合も、$f(x)$ には最小値が存在しない。
したがって、$f(x)$ の最小値が存在するためには、$a > 0$ でなれればならない。
そこで、$a > 0$ で考える。
このとき、$f(x)$ は、$f'(x) = 0$ の点で最小値をとる。
$f'(x) = 2ax + b$ なので
$2ax + b = 0$ として、$x = -b/2a$
このときの最小値は $f(-b/2a) = a(-b/2a)^2 + b(-b/2a) + c = b^2/4a - b^2/2a + c = -b^2/4a + c$
この値を最大とするものを考える。
前述のとおり、$a + b + c = 1$
$9a + 3b + c = 5$
より、$a = 1 - b - c$
これを $9a + 3b + c = 5$ に代入すると $9(1 - b - c) + 3b + c = 5$
よって $9 - 9b - 9c + 3b + c - 5 = 0$
$4 - 6b - 8c = 0$
$4 - 6b = 8c$
$c = (2 - 3b)/4$
よって、$a = 1 - b - (2 - 3b)/4 = (4 - 4b - 2 + 3b)/4 = (2 - b)/4$ これらを $-b^2/4a + c$ に代入すると

$$
\begin{aligned}
&-b^2/4((2-b)/4) + (2-3b)/4 \\
&= -b^2/(2-b) + (2-3b)/4 \\
&= (1/4(2-b))(-4b^2 + (2-b)(2-3b)) \\
&= (1/4(2-b))(-4b^2 + 4 - 8b + 3b^2) \\
&= (1/4(b-2))(b^2 + 8b - 4) \\
&= \frac{b^2 + 8b - 4}{4(b-2)}
\end{aligned}
$$

最小値が最大となるのは、$f(-b/2a)$ が最大となるときであるが
$c = (2 - 3b)/4 > 0$ より $2/3 > b$
また、$a = (2 - b)/4 > 0$ より $2 > b$

よって $b < \dfrac{2}{3}$
$g(b) = \dfrac{b^2+8b-4}{4(b-2)}$ とおくと、

$$g'(b) = \frac{(b-6)(b+2)}{4(b-2)^2}$$

となり、$g'(b)$ の分母はつねに正なので、正負は、分子の正負によってきまる。
分子は、$b < 6$,$b < -2$ において正、$-2 < b < 6$ において負
いま、$b < \dfrac{2}{3}$ なので、
$b < -2$ において、正、$-2 < b < 2/3$ において負となるから
$g(b)$ は、$b < -2$ の範囲で単調増加、$-2 < b < 2/3$ の範囲で単調減少となり、
$b = -2$ において最大値をとる。
その値は、$g(-2) = 1$
このとき、$c = (2-3b)/4$ より $c = (2-3(-2))/4 = 2$
$a = (2-b)/4 = (2-(-2))/4 = 1$
以上より $f(x)$ の最小値を最大とするのは

$$(a, b, c) = (1, -2, 2)$$