京都大学　1973 年　入学試験　文系数学　問題 6

問題

放物線 $y = ax^2 - 4$ $(a > 0)$ と直線 $y = 5$ とで囲まれた部分の面積を S とし，その部分を y 軸のまわりに一回転してできる回転体の体積を V とする．
S，V の値を求め，S と V の間の a を含まない関係式を導け．

解答

x, y を入れ換えて
$x = ay^2 - 4$ と $x = 5$ によって囲まれた面積を S および、それを x 軸の周りに回転した体積を V としても変わらない。
このとき、$a > 0$ なので、$x > -4$
このとき $x = ay^x - 4$ は、x 軸に対して対象な図形なので、面積は $y > 0$ の範囲の面積の 2 倍
したがって、$y = \sqrt{x+4}/a$ としたときの $-4 < x < 5$ の範囲で x 軸と囲む部分の面積の 2 倍となる。
この面積は

$$\begin{aligned}
S = 2\int_{-4}^{5} y\ dx &= \int_{-4}^{5} \frac{\sqrt{x+4}}{a}\ dx \\
&= 2\left[\frac{2(\sqrt{x+4})^3}{3a}\right]_{-4}^{5} \\
&= 2\frac{2(\sqrt{5+4})^3}{3a} - \frac{2(\sqrt{-4+4})^3}{3a} \\
&= \frac{36}{a}
\end{aligned}$$

また、体積も同様に、$y > 0$ の部分を 1 回転したものと一致するので

$$\begin{aligned}
V = \int_{-4}^{5} \pi y^2\ dx &= \int_{-4}^{5} \pi\left(\frac{\sqrt{x+4}}{a}\right)^2\ dx \\
&= \int_{-4}^{5} \pi\frac{x+4}{a^2}\ dx \\
&= \left[\pi\frac{x^2+8x}{2a^2}\right]_{-4}^{5} \\
&= \pi\left(\frac{5^2+8*5}{2a^2} - \frac{(-4)^2+8(-4)}{2a^2}\right) = \pi\frac{81}{2a^2}
\end{aligned}$$

$S = \dfrac{36}{a}$ より
$a = \dfrac{36}{S}$ となり

$$V = \pi\frac{81}{2a^2} = \pi\frac{81}{2(36/S)^2} = \pi\frac{S^2}{32}$$