京都大学　1973 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

p, q, r は実数とする．3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ において，一根が 1 で，他の二根はその絶対値がいずれも 1 であるための必要十分条件を求めよ．

解答

１根が１なので、$x^3+px^2+qx+r=0$ に $x=1$ を代入してもこの式は成立する。したがって

$$1+p+q+r=0 \tag{1}$$

残りの２根を a,b とすると
この式は

$$(x-1)(x-a)(x-b)=0 \tag{2}$$

と因数分解される。
この式を展開すると

$$x^3-bx^2-ax^2-x^2+abx+bx+ax-ab \tag{3}$$

となるので、各次数の係数をまとめると２次の係数が $-(b+a+1)$
１次の係数が $ab+a+b$
定数項が $-ab$
となる
これらが p,q,r に一致するのでまた (1) から $r=-(p+q+1)$ なので

$$p=-(b+a+1)$$
$$q=ab+a+b$$
$$p+q+1=ab$$

となる。

そこで a,b について解くと

$$a+b=-(p+1) \tag{4}$$

$$ab=p+q+1 \tag{5}$$

(4) から

$$b=-(a+p+1) \tag{6}$$

(6) を (5) に代入して

$$-a(a+p+1)=p+q+1 \tag{7}$$

整理すると

$$a^2+pa+a+p+q+1=0 \tag{8}$$

a について解くと

$$\left[a=-\frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}+p+1}{2}, a=\frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}-p-1}{2}\right] \tag{9}$$

a を (6) に代入して

$$\left[b = \frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}-p-1}{2}, b = -\frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}+p+1}{2}\right] \tag{10}$$

a, b は対等なので a と b はこの二つの解のそれぞれになる。

この平方根の中の正負で分けて考える。

平方根の中が負の場合

p, q は実数なのでこの解が複素数になる

また、複素数になるのは、この値が負の場合に限る。

その場合、実部は $-(p+1)/2$、虚部は $\pm(\sqrt{-4q+p^2-2p-3})/2$ となるので a, b は互いに共役となる。

またこの絶対値は

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\left(\sqrt{(}-4q+p^2-2p-3)/2\right)^2+((p+1)/2)^2}\\
&= \sqrt{(4q-p^2+2p+3+p^2+2p+1)/4}\\
&= \sqrt{(4p+4q+4)/4}\\
&= \sqrt{p+q+1}
\end{aligned}$$

$(-4q+p^2-2p-3<0$ より $\left(\sqrt{(-4q+p^2-2p-3)}\right)^2 = 4q-p^2+2p+3)$

この値が 1 である必要があるから

$$\begin{aligned}
\sqrt{p+q+1} &= 1\\
p+q+1 &= 1\\
p+q &= 0\\
p &= -q
\end{aligned}$$

$-4q+p^2-2p-3 = 4p+p^2-2p-3 = p^2+2p-3 = (p-1)(p+3)$

この値が負であることが条件なので、$-3<p<1$

平方根の中が正の場合

a, b ともに正とはならないので一方が 1 他方が-1 となる。

$$\frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}-p-1}{2} = 1 \tag{11}$$

の場合を考えると

$$\begin{aligned}
\sqrt{-4q+p^2-2p-3}-p-1 &= 2\\
\sqrt{-4q+p^2-2p-3} &= p+3
\end{aligned}$$

$p+3>0$ が必要

$p>-3$ と仮定して

$$\begin{aligned}
-4q+p^2-2p-3 &= (p+3)^2\\
-4q+p^2-2p-3 &= p^2+6p+9\\
-4q-8p-12 &= 0\\
-q-2p-3 &= 0\\
q+2p &= 3\\
p &= (3-q)/2
\end{aligned}$$

このとき

$$-\frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}+p+1}{2}=-1$$

なので

$$\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}+p+1}{2} &= -1\\
\sqrt{-4q+p^2-2p-3}+p+1 &= 2\\
\sqrt{-4q+p^2-2p-3} &= 1-p\\
-4q+p^2-2p-3 &= (1-p)^2\\
-4q+p^2-2p-3 &= p^2-2p+1\\
-4q-4 &= 0\\
q &= 1
\end{aligned}$$

よって
$p=(3-q)/2=(3-1)/2=1$
よって $r=-1-p-q=-1$

$$(p,q,r)=(1,1,-1)$$

しかし、$-4p+p^2-2p-3=-4+1-2-3=-8$ となり、平方根の内部が正であることに反する。
よって、この値は不可

$$\frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}-p-1}{2}=-1 \tag{12}$$

の場合を考えると

$$\begin{aligned}
\sqrt{-4q+p^2-2p-3}-p-1 &= -2\\
\sqrt{-4q+p^2-2p-3} &= p-1\\
-4q+p^2-2p-3 &= p^2-2p+1\\
-4q &= 4\\
q &= -1
\end{aligned}$$

このとき

$$-\frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}+p+1}{2}=1$$

なので

$$\begin{aligned}
-\frac{\sqrt{-4q+p^2-2p-3}+p+1}{2} &= 1\\
\sqrt{-4q+p^2-2p-3}+p+1 &= -2\\
\sqrt{-4q+p^2-2p-3} &= -p-3
\end{aligned}$$

$-p-3>0$ より $p<-3$

$$\begin{aligned}
-4q+p^2-2p-3&=p^2+6p+9\\
-4q+8p&=12\\
-q+2p&=3\\
p&=(3+q)/2
\end{aligned}$$

よって $p=(3+(-1))/2=1$
しかしこれは、$p<-3$ に反するので不可

平方根の中が 0 の場合
$-(p+1)/2=\pm1$,$-4q+p^2-2p-3=0$ となるので
$-(p+1)/2=1$ の場合
$p=-3$ $-4q+9+6-3=0$
$-4q=-12$
$q=3$
$r=-1-q-p=-1$

$-(p+1)/2=-1$ の場合
$p=1$
$-4q+1-2-3=0$
$-4q=4$
$q=-1$
$r=-1-p-q=-1$

どちらの場合も $p+q=1$ なので、平方根の中が負の場合の条件で $p=1,-3$ とした場合とおなじ。

以上より、絶対値が 1 であるための十分条件は $p+q=0, r=-1, -3\leqq p\leqq 1$ となる。

また、$p+q=0, r=1, -3\leqq p\leqq 1$ の場合、
方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ は $x^3+px^2-px-1=0$ となる。
これを因数分解すると $(x-1)(x^2+(p+1)x+1)=0$ となる。
この方程式の解は 1 と

$$x=\frac{p+1\pm\sqrt{(p-1)(p+3)}}{2}$$

となり、この絶対値は
$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{(p-1)(p+3)}}{2}\right)^2$ となるが、
$-3\leqq p\leqq 1$ なので、$(p-1)(p+3)<0$
したがって、

$$(\sqrt{(p-1)(p+3)})^2=-(p-1)(p+3)$$

これをもとに計算すると

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{p+1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{(p-1)(p+3)}}{2}\right)^2\\
&=\frac{p^2+2p+1-p^2-2p+3}{4}\\
&=\frac{4}{4}\\
&=1
\end{aligned}
$$

となり、絶対値は常に 1

よって、条件は必要十分である。