京都大学　1973 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

正三角形 ABC がある．点 O を直線 AB に関して C と反対側にとって $\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$ となるようにし，ベクトル $\vec{\mathrm{OA}}$，$\vec{\mathrm{OB}}$，$\vec{\mathrm{OC}}$ をそれぞれ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ で表す．
このとき

$$\boldsymbol{c} = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} + \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$$

であることを証明せよ．
ただし，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の大きさを示す．

解答

$a = |\boldsymbol{a}|, b = |\boldsymbol{b}|$ とおく
$\boldsymbol{a}_e = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}, \boldsymbol{b}_e = \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ とすると
これらはベクトルをその大きさで割っているので単位ベクトル
つまり長さは 1
よって、点 O を始点として、$\boldsymbol{a}_e$,$\boldsymbol{b}_e$ をとると、これは頂点の角度が 60° の二等辺三角形となり、正三角形である。
$\vec{\mathrm{AB}}$ を考えると、
これは $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ である
この大きさは 余弦定理より
$\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ} = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$
よって、三角形 ABC は 1 辺 $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$ の正三角形
点 O からみて、A が右側であるとしても一般性は失われないので $\vec{\mathrm{AC}}$ は、$\vec{\mathrm{AB}}$ を右に 60° 回転させたもの
つまり、ベクトル

$$\vec{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} \cos -60^\circ & -\sin -60^\circ \\ \sin -60^\circ & \cos -60^\circ \end{pmatrix} \vec{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \vec{\mathrm{AB}}$$

今、原点を O,A が x 軸上にあるような座標系をとると
$\boldsymbol{a} = (a, 0)$ $\boldsymbol{b} = (b/2, b\sqrt{3}/2)$ となるので、
$\vec{\mathrm{AB}} = (b/2 - a, b\sqrt{3}/2)$
したがって、

$$\begin{aligned}
\vec{\mathrm{AC}} &= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \vec{\mathrm{AB}} \\
&= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b/2 - a \\ b\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (b/2 - a)(1/2) + (b\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/2) \\ (b/2 - a)(-\sqrt{3}/2) + (b\sqrt{3}/2)(1/2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b/4 - 2a/4 + 3b/4 \\ -b\sqrt{3}/4 + a\sqrt{3}/2 + b\sqrt{3}/4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b - a/2 \\ a\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c} = \vec{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{a} + \vec{\mathrm{AC}}$$

より

$$\boldsymbol{c} = \vec{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b - a/2 \\ a\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + a/2 \\ a\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} + \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b} \\
&= \frac{b}{a}\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b}{a}\begin{pmatrix} b/2 \\ b\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a/2 \\ a\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b + a/2 \\ a\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以上より、

$$\boldsymbol{c} = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} + \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\boldsymbol{b}$$