京都大学　1973 年　入学試験　理系数学　問題 4

問題

$$\lim_{n\to\infty} n\Big[\frac{(\sqrt{n(n+1)}-n)^3}{n}-\frac{(\sqrt{n(n+1)}-(n+1))^3}{n+1}\Big]$$

を求めよ.

解答

$f(n)=n\Big[\dfrac{(\sqrt{n(n+1)}-n)^3}{n}-\dfrac{(\sqrt{n(n+1)}-(n+1))^3}{n+1}\Big]$ とする。

$n+1>n>0$ は自明なので、$a=\sqrt{n}$

$b=\sqrt{n+1}$

とおいても $a^2=n, b^2=n+1$ として式変形に制限はない。

よって、

$$\begin{aligned}
&f(n)=n\Big[\frac{(\sqrt{n(n+1)}-n)^3}{n}-\frac{(\sqrt{n(n+1)}-(n+1))^3}{n+1}\Big]\\
&=a^2\Big[\frac{(\sqrt{a^2b^2}-a^2)^3}{a^2}-\frac{(\sqrt{a^2b^2}-(b^2))^3}{b^2}\Big]\\
&=a^2\Big[\frac{(ab-a^2)^3}{a^2}-\frac{(ab-b^2)^3}{b^2}\Big]\\
&=a^2\Big[\frac{(a(b-a))^3}{a^2}-\frac{(b(a-b))^3}{b^2}\Big]\\
&=a^2\Big[\frac{a^3(b-a)^3}{a^2}-\frac{b^3(a-b)^3}{b^2}\Big]\\
&=a^2\Big[\frac{a^3(b^3-ab^2+a^2b-a^3)}{a^2}-\frac{b^3(a^3-a^2b+ab^2-b^3)}{b^2}\Big]\\
&=a^2(a(b^3-3ab^2+3a^2b-a^3)-b(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3))\\
&=a^2(b-a)^3(b+a)\\
&=a^2(b-a)^2(b-a)(b+a)\\
&=a^2(b-a)^2(b^2-a^2)\\
&=a^2(b-a)^2\\
&=(ab-a^2)^2
\end{aligned}$$

ここでここで $(g(n))^2=f(n)$ とおくと

$$\begin{aligned}
g(n)&=a(b-a)\\
&=\frac{a(b-a)(b+a)}{b+a}\\
&=\frac{a(b^2-a^2)}{b+a}\\
&=\frac{a}{b+a}
\end{aligned}$$

次に $h(n)$ を $h(n)=\dfrac{1}{g(n)}$ とおいて

$$\begin{aligned}
h(n)&=\frac{b+a}{a}\\
&=\frac{b}{a}+\frac{a}{a}\\
&=\frac{b}{a}+1
\end{aligned}$$

a, b を n に戻すと

$$h(n) = \sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1$$

ここで、$h(n)$ は $n \to \infty$ において収束し以下のようになる。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} h(n) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

$h(n)$ が収束するので $\dfrac{1}{h(n)}$ も収束し

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{h(n)} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって、$g(n)$ は収束するので、$f(n)$ も収束し

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(n) &= \lim_{n\to\infty} g^2(n) \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。

以上より

求めるべき極限は、$\dfrac{1}{4}$