京都大学　1974 年　入学試験　文系数学　問題 5

問題

正の定数 a，b に対し，不等式

$$4m < n^2 < 4m + \frac{a}{\sqrt{m}} + \frac{b}{m}$$

を考え，次の問いに答えよ．

1. $m > 0$，かつ m，n ともに整数であって，この不等式をみたすような m，n の組は有限個しか存在しないことを証明せよ．
2. $a = 8$，$b = 9$，$m \geqq 9$ であるときは，上の不等式をみたす整数 m，n の組は $n^2 = 4m + 1$ をみたすことを証明せよ．
3. (2) の場合の m，n の組のうち，n が最も大きいものを求めよ．

解答

任意の a, b について
$\frac{a}{\sqrt{m}} + \frac{b}{m} < 1$
となる m をとることができる。
具体的には
$m > 0$ より
$a\sqrt{m} + b < m$
$a\sqrt{m} + b - m < 0$

$f(m) = a\sqrt{m} + b - m$ としたとき、
$f'(m) = \dfrac{a}{2\sqrt{m}} - 1$
$f'(m) = 0$ となるのは
$\dfrac{a}{2\sqrt{m}} - 1 = 0$
$\dfrac{a}{2\sqrt{m}} = 1$
$\dfrac{a}{2} = \sqrt{m}$
$m = \dfrac{a^2}{4}$ のとき

$f'(m)$ は単調減少なので、
$m > \dfrac{a^2}{4}$ において、$f'(m) < f'(\dfrac{a^2}{4}) = 0$

よって、$f(m)$ は $m > \dfrac{a^2}{4}$ で単調減少
$f(m) = 0$ を解くと
$\sqrt{m} = \dfrac{a \pm \sqrt{4b + a^2}}{2}$
$a > 0, b > 0$ より、
$\sqrt{m} = \dfrac{a + \sqrt{4b + a^2}}{2}$
$m = \left(\dfrac{a + \sqrt{4b + a^2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2} + b + \dfrac{a\sqrt{4b + a^2}}{2}$

$\dfrac{a^2}{2}+b+\dfrac{a\sqrt{4b+a^2}}{2}>\dfrac{a^2}{4}$ はあきらかなので

$m>\dfrac{a^2}{2}+b+\dfrac{a\sqrt{4b+a^2}}{2}$ の範囲では、

$f(m)$ は単調減少なので

$f(m)<f(\dfrac{a^2}{2}+b+\dfrac{a\sqrt{4b+a^2}}{2})=0$ より

よって、$f(m)<0$

したがってこの範囲で

$\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}<1$ となる。

つまり、不等式は $4m<n^2<4m+1$ となるが、この間に整数は無い。

よって、これを満たす n は存在しない

つまり、任意の正数 a,b について、十分大きな数 m が存在し、不等式を成立させないことができる。

したがって、この不等式を満たす可能性のある m は有限しか無い。

そのそれぞれの m について、$\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}$ は有限の値で決まるので

$4m<n^2<4m+\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}$ となる n は存在するとしても有限。

よって、(n,m) の組は有限個しかない。

1.

$a=8,\ \ b=9,\ \ m\geqq 9$ より、

$4m<n^2<4m+\frac{8}{\sqrt{m}}+\frac{9}{m}$ を満たす m,n を考える。

$m\geqq 9$ より

$\dfrac{9}{m}\leqq 1$

$\dfrac{8}{\sqrt{m}}\leqq\frac{8}{3}<3$

したがって、

この式を満たす n,m の組は、最低限

$4m<n^2<4m+4$ を満たす。

つまり、$n^2=4m+1,4m+2,4m+3$ のいずれかになる

n^2 が偶数と仮定すると

$n^2=4m+2$ しかなくて、

$4m+2=2(2m+1)$ となり、n^2 は偶数、n^2 が偶数ならば、n も偶数でなければならない。

よって、$n=2l$ とおくと、

$n^2=4l^2=2(2m+1)$

よって、$2l^2=2m+1$ となるが、左辺は偶数で右辺は奇数、したがってこの式はあり得ない。

よって、n^2 は奇数。

n^2 は奇数なので

n も奇数

これを、$2p+1$ とおくと $n^2=(2p+1)^2=4p^2+4p+1=4(p^2+p)+1$

したがって、n^2 は4で割ると1余る。

よって、n^2 は、$4m+1$ しかあり得ない。

したがってこの式を満たす、m,n の組は、$n^2=4m+1$ となる。

3.

$\dfrac{8}{\sqrt{m}}+\dfrac{9}{m}>1$ であることが必要

1. より

$\dfrac{8^2}{2}+9+\dfrac{8\sqrt{4*9+8^2}}{2}=81$ から

$m>81$ の範囲では、n は存在しないので、$m \leqq 81$

また、$n^2=(2p+1)^2=4p(p+1)+1=4m+1$ より

$m=p(p+1)$ の形なので、81 以下でこの形になる最大の数は、$8*9=72$

以上より、

$$m=72, n=17$$