京都大学　1974 年　入学試験　文系数学　問題 6

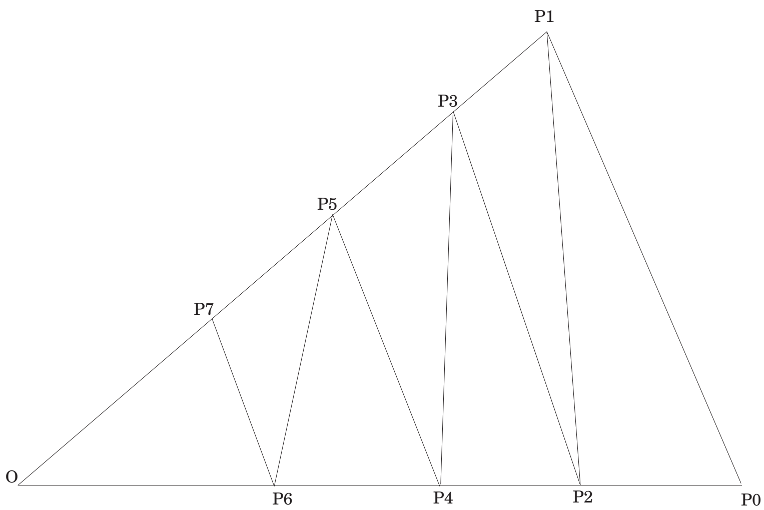
問題

1. $\triangle \mathrm{OP_0P_1}$ が与えられている．
 辺 $\mathrm{P_0O}$ 上に点 $\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_4}$，$\cdots$,P_{2n}，$\cdots$ を，また辺 $\mathrm{P_1O}$ 上に点 $\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_5}$，$\cdots$，P_{2n+1}，$\cdots$ を適当にとって，次の三条件（イ）〜（ハ）がみたされるようにしうるための，$\triangle \mathrm{OP_0P_1}$ についての条件を求めよ．

 （イ）　$\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_4}$，$\cdots$,P_{2n},$\cdots$ はこの順に線分 $\mathrm{P_0O}$ 上にならび，しかも n が大きくなるに従って，O に近づく．
 （ロ）　$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_5}$，$\cdots$，P_{2n+1}，$\cdots$ はこの順に線分 $\mathrm{P_1O}$ 上にならんでいる．
 （ハ）　$\triangle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} \backsim \triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ が，n のどの自然数値に対しても成立する．
 （ここでいう相似は，左辺の三角形の P_{n-1}，P_n，P_{n+1} が右辺の三角形の P_n，P_{n+1}，P_{n+2} に順次対応した相似を意味する．）
2. 上のように点がとれたとき，$\triangle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を第 n 項 $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とする数列は
 （イ）　いつでも等比数列である
 （ロ）　等比数列になる場合もあり，等比数列にならない場合もある
 （ハ）　けっして等比数列にならない
 のどれが正しいか，理由を付して答えよ．

解答

$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_5}$ はこの順に線分 $\mathrm{P_1O}$ 上に並んでいるが n が大きくなるにしたがって O に近付くとは決まっていない。
しかし、n が大きくなるにしたがって、O に近付かないとすると、
可能性は $\mathrm{P_3}$ 以降が、$\mathrm{P_1}$ からみて、O と反対側に並ぶか、
$\mathrm{P_1}, \mathrm{P_3}, \cdots$ がすべて、$\mathrm{P_1}$ に一致するか
ある $k < n$ において、O を越えてすすむか
のいずれかであるが、
O と反対側に並ぶ場合、と $k < n$ において、O を越えてしまう場合は、
線分 $\mathrm{P_1O}$ 上であるという指定に反するので、すべて一致するしかない。
しかしその場合、$\angle \mathrm{P}_{2n}\mathrm{P}_{2n+1}\mathrm{P}_{2n+1}$ がすべて 0 となってしまい、相似であることから $\angle \mathrm{P}_{2n+1}\mathrm{P}_{2n+2}\mathrm{P}_{2n+3}$ もすべて 0 となり、
$\mathrm{P_2}, \mathrm{P_4}, \cdots$ がすべて、$\mathrm{P_0}$ に一致してしまう。
しかし、これは条件 (イ) の大きくなるにしたがって O に近付くということに反するため、
$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_5}$，$\cdots$,P_{2n+1},$\cdots$ はこの順に線分 $\mathrm{P_1O}$ 上にならび，しかも n が大きくなるに従って，O に近づく．
したがって、下の図のようになる。



$n=1$ のとき、

$\triangle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} \backsim \triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ より

$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \backsim \triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$

これが成立するためには

$\angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$

$\angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1 = \angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2$

$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2 = \angle \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3$

が成立すればよいが、三角形の内角の和は一定なので、このうち二つが成立すれば必要十分。

相似なので

$\angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 + \angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2 = \angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3$

P_0 と P_2 は一致しないので、$\angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 > 0$

$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2 < \angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3$

$\angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2 = \angle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_0\mathrm{O}$

$\angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3 = \angle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{O}$

より、$\triangle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ について $\angle \mathrm{P}_0 < \angle \mathrm{P1}$ が必要。

また、このとき、

$\angle \mathrm{P}_2\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 \backsim \triangle \mathrm{P}_3\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$

$\angle \mathrm{P}_0\mathrm{OP}_1 \backsim \triangle \mathrm{P}_1\mathrm{OP}_2$

より $\triangle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1 \backsim \triangle \mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2$

したがって、$\triangle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ の面積を S_0 とすると

$S_0 : S_1 = \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 : \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$

$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 \backsim \triangle \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ なので

$\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1 : \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 : \mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$

また一般の k についても

$S_k : S_{k+1} = \mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1} : \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2}$

であり、このとき $\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2}$ と $\triangle \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+3}$ は相似なので

$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1} : \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2} = \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2} : \mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+3}$

数学的帰納法より任意の k について、$S_k : S_{k+1} = S_0 : S_1$

また、$\dfrac{S_1}{S_0} = \dfrac{\mathrm{OP}_1}{\mathrm{OP}_0}$

よって、S_n は初項 S_0、公比 $\dfrac{\mathrm{OP}_1}{\mathrm{OP}_0}$ の等比数列
ここで公比を r とおく

$\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = S_0 - S_1$
一般に
$\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2} = S_k - S_{k+1}$
よって、
$\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2} : \triangle \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+3} = S_k - S_{k+1} : S_{k+1} - S_{k+2}$
$\dfrac{\triangle \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+3}}{\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2}} = \dfrac{S_{k+1} - S_{k+2}}{S_k - S_{k+1}}$
$S_k = r^k S_0$ より

$$\begin{aligned}\frac{S_{k+1} - S_{k+2}}{S_k - S_{k+1}} &= \frac{r^{k+1}S_0 - r^{k+2}S_0}{r^kS_0 - r^{k+1}S_0} \\ &= \frac{r^{k+1}S_0(1-r)}{r^kS_0(1-r)} \\ &= r\end{aligned}$$

よって、$\dfrac{\triangle \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2}\mathrm{P}_{k+3}}{\triangle \mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{P}_{k+2}} = r$
よって、任意の $k, k+1$ に該当する三角形の面積の比は一定
したがって、三角形の面積は等比数列となる。