京都大学　1974年　入学試験　理系数学　問題1

問題

$0 \leqq \alpha < \beta < \gamma < 2\pi$ であって

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 0, \quad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$$

であるという．$\beta - \alpha$ と $\gamma - \beta$ の値を求めよ．

解答

$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\gamma = 0$$
$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$
$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\gamma = 0$$

より $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 0$ の場合

$\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 1$

$\cos\gamma = 0 \ \rightarrow \ \gamma = \pi/2, 3\pi/2$

よって $\sin\gamma = 1$

$\alpha + \beta = \pi, 3\pi$

$\cos\alpha + \cos\beta = 0$,$\sin\alpha + \sin\beta = 0$

$\cos\alpha = -\cos\beta = \cos(\pi \pm \beta)$

$\sin\alpha = -\sin\beta = \sin(2\pi - \beta)$

よって、$\alpha = \pi \pm \beta$,$\alpha = 2\pi - \beta$

$\alpha = \pi + \beta$ だと、$\alpha < \beta$ に反するので、$\alpha = \pi - \beta$

$\alpha = 2\pi - \beta$ より $\pi - \beta = 2\pi - \beta$ でこれは矛盾

よって、$\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 0$ は条件に合わない

同様に $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 0$ の場合

$\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 1$

$\cos\gamma = 0$,$\sin\gamma = 1$ となり、

同様にして、条件に合わない。

したがって、$\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$,$\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \neq 0$

この条件では、以下の様に変形できて

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = -\dfrac{\cos\gamma}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

$\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = -\dfrac{\sin\gamma}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

これより

$-\dfrac{\cos\gamma}{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}} = -\dfrac{\sin\gamma}{2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

したがって

$\dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \dfrac{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

$\tan\gamma = \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$\tan$ は π を周期とする、周期関数なので、

$\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + n\pi$

しかし、$0 < \gamma < 2\pi$ なので、$\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}, \dfrac{\alpha+\beta}{2} \pm \pi$

同様の議論を α, β に対して行うことで

$\alpha = \dfrac{\gamma+\beta}{2}, \dfrac{\gamma+\beta}{2} \pm \pi$

$\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}, \dfrac{\alpha+\gamma}{2} \pm \pi$

となる。

ここで、

$\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ とすると $\gamma - \alpha = \beta - \gamma$ となり、$\gamma - \beta > 0$ より $\gamma - \alpha < 0$ つまり、$\gamma < \alpha$ となって、条件に反する。

よって、$gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + \pi$

$\alpha = \dfrac{\gamma+\beta}{2}$ とすると

$\alpha - \gamma = \beta - \alpha$ となり、

$\alpha < \gamma$ より、$\beta - \alpha < 0$ つまり $\beta < \alpha$ となって、条件に反する。

$\beta = \dfrac{\gamma+\alpha}{2}$ とすると

$\alpha < \beta < \gamma$ となり、条件に合う。

$\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2} - \pi$ とすると、

$\dfrac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ より、$\gamma < \beta$ となって、条件に反する。

よって、$\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + \pi$

同様の議論から、

$\beta = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

$\alpha = \dfrac{\alpha+\beta}{2} - \pi$

となる。$\alpha = \dfrac{\gamma+\beta}{2} - \pi$,$\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2} + \pi$ より

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\alpha+\beta}{2} + \pi \\ &= \frac{\frac{\gamma+\beta}{2} - \pi + \beta}{2} + pi \\ &= \frac{-2\pi + \gamma + 3\beta}{4} + \pi\end{aligned}$$

$\gamma = \dfrac{-2\pi + \gamma + 3\beta}{4} + \pi$

$\gamma - \beta = \dfrac{2\pi}{3}$

また、

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\gamma+\alpha}{2} \\ &= \frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\pi+\alpha}{2} \\ &= \frac{2\pi+\beta+3\alpha}{4}\end{aligned}$$

$\beta = \dfrac{2\pi+\beta+3\alpha}{4}$

$\beta - \alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

以上より、

$$\gamma-\beta = \frac{2\pi}{3}, \beta-\alpha = \frac{2\pi}{3}$$