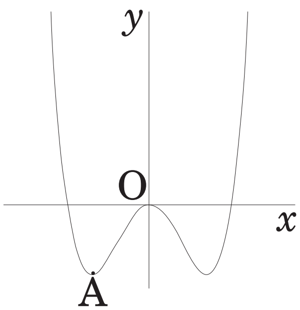
京都大学　1974 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

底の断面の形が曲線 $y = x^4 - 6p^2x^2 - 8q^3x$（$p > 0$, $q \geqq 0$）の形の容器がある．（y 軸は鉛直，正の方向を上方にとり，x 軸は水平にとる．）最初 $q = 0$ のときは，大体右図の形になっているので，図の点 A の位置に
-13zw-13zw小球をおく．ここで，p は固定したまま，q の値をだんだん大きくしていって，ある値を越えたら，この小球は右側のくぼみに転落した．この値を p を用いて表わせ．



解答

$f(x) = x^4 - 6p^2x^2 - 8q^3x$ とおく。
$f(x)$ を x で微分すると、
$f'(x) = 4x^3 - 12p^2x - 8q^3$
$q = 0$ の時、
$f'(x) = 4x^3 - 12p^2x = 4x(x^2 - 3p^2) = 4x(x - \sqrt{3}p)(x + \sqrt{3}p)$
と因数分解できるので、$f'(x) = 0$ の解は
$x = 0, \pm\sqrt{3}p$
したがって、図の左側のくぼみの底の部分、点 A が存在する場所の x 座標は、$-\sqrt{3}p$
q が大きくなっても、球が右側のくぼみに転落しないためには、極値が 3 つ存在すればいい
つまり、極地の x の値を小さい方から、$a \leqq b \leqq c$ とすると、$f(a) < f(b)$ であれば、球は、$f(a)$ の位置から移動しない。
また、極値が二つになった場合、$a = b$ と、$b = c$ が考えられるが、$b = c$ では、右側のくぼみというものが存在しなくなるので
$a = b \neq c$ の時に球は転落する。
つまり、右側のくぼみに転落したのは、極値が a, b が一致した瞬間となる。
そのとき、$f'(x) = 4(x - a)^2(x - c)$ なので
$f'(x) = 4x^3 - 4cx^2 - 8ax^2 + 8acx + 4a^2x - 4a^2c$
これが、$4x^3 - 12p^2x - 8q^3$ と一致するので、

$$
\begin{aligned}
-4c - 8a &= 0 \\
8ac + 4a^2 &= -12p^2 \\
-4a^2c &= -8q^3
\end{aligned}
$$

が必要。
この式を変形して、

$$c = -2a \tag{1}$$
$$2ac + a^2 = -3p^2 \tag{2}$$
$$a^2 c = 2q^3 \tag{3}$$

(1) を (2)(3) に代入して、

$$-3a^2 = -3p^2$$
$$-2a^3 = 2q^3$$

$$a^2 = p^2$$
$$-a^3 = q^3$$

$p > 0, q \geqq 0$ より
$a = \pm p$
a は実数なので、
$q = -a$
したがって、$q = \mp p$ となるが、
$p > 0, q \geqq 0$ より
$q = p$
このとき、$f'(x) = 4x^3 - 12p^2 x - 8p^3 = 4(x-2p)(x+p)^2$ となり、たしかに、$x = -p$ の重解を持つ、
したがって、球は、$x = 2p$ のくぼみに転落する。