京都大学　1974 年　入学試験　理系数学　問題 4

問題

$F(x)$，$g(x)$ が x の多項式で，次の三条件をみたすものとする．$F(x)$ および $g(x)$ を求めよ．

（イ）$\dfrac{dF(x)}{dx} = g(x)$.

（ロ）$F(x)$ は $g(x)$ で割り切れる．

（ハ）$g(x)$ は n 次式で，x^n の係数は 1，x^{n-1} の係数は 0 である．

解答

$g(x) = x^n + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \cdots + a_1x + a_0$ とおく

$g(x) = 0$ の解を $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ とすると

$g(x) = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)\cdots(x - b_n)$ と因数分解される。

したがって、x^{n-1} の係数は $-b_1 - b_2 - b_3 - \cdots - b_n$ となりこれが 0 である。

$\dfrac{dF(x)}{dx} = g(x)$ より $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + \dfrac{1}{n-1}a_{n-2}x^{n-1} + \cdots + \dfrac{1}{2}a_1x^2 + a_0x + c$ となる。

ここで、$F(x)$ が $g(x)$ で割り切れることから、

$F(x)$ は $n+1$ 次の多項式なので

$F(x) = t(x-b)g(x)$ とかけるので

$F(x) = t(x-b)(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)\cdots(x-b_n)$ となる。

x^{n+1} の係数は $\dfrac{1}{n+1}$ だから、$t = \dfrac{1}{n+1}$

x^n の係数は $t(-b - b_1 - b_2 - b_3 - \cdots - b_n)$ となるが、$F(x)$ の展開から、これは 0 なので

$t(-b - b_1 - b_2 - b_3 - \cdots - b_n) = 0$

$-b_1 - b_2 - b_3 - \cdots - b_n = 0$ なので $t(-b) = 0$

しかし、$t \neq 0$ なので、$b = 0$

したがって、$F(x) = \dfrac{1}{n+1}xg(x)$

よって

$\dfrac{dF(x)}{dx} = \dfrac{1}{n+1}(g(x) + xg'(x)) = g(x)$ であるから

$xg'(x) = ng(x)$

$xg'(x) = nx^n + (n-2)a_{n-2}x^{n-2}\cdots + a_1x$

$ng(x) = nx^n + na_{n-2}x^{n-2} + \cdots + na_1x + na_0$

となり、係数がすべて一致しなければならないので

$$
\begin{aligned}
(n-2)a_{n-2} &= na_{n-2} \\
(n-3)a_{n-3} &= na_{n-3} \\
&\vdots \\
a_1 &= na_1 \\
0 &= na_0
\end{aligned}
$$

したがって、a_0 から a_{n-2} はすべて 0

以上より、

$$g(x) = x^n$$

したがって

$F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ であるが、$g(x)$ で割り切れることから

$$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$