京都大学　1974年　入学試験　理系数学　問題5

問題

正の定数 a, b に対し，不等式

$$4m < n^2 < 4m + \frac{a}{\sqrt{m}} + \frac{b}{m}$$

を考え，次の問いに答えよ．

1. $m > 0$, かつ m, n ともに整数であって，この不等式をみたすような m, n の組は有限個しか存在しないことを証明せよ．
2. $a = 8$, $b = 9$, $m \geqq 9$ であるときは，上の不等式をみたす整数 m, n の組は $n^2 = 4m + 1$ をみたすことを証明せよ．
3. (2) の場合の m, n の組のうち，n が最も大きいものを求めよ．

解答

任意の a, b について

$\frac{a}{\sqrt{m}} + \frac{b}{m} < 1$

となる m をとることができる。

具体的には

$m > 0$ より

$a\sqrt{m} + b < m$

$a\sqrt{m} + b - m < 0$

$f(m) = a\sqrt{m} + b - m$ としたとき、

$f'(m) = \dfrac{a}{2\sqrt{m}} - 1$

$f'(m) = 0$ となるのは

$\dfrac{a}{2\sqrt{m}} - 1 = 0$

$\dfrac{a}{2\sqrt{m}} = 1$

$\dfrac{a}{2} = \sqrt{m}$

$m = \dfrac{a^2}{4}$ のとき

$f'(m)$ は単調減少なので、

$m > \dfrac{a^2}{4}$ において、$f'(m) < f'(\dfrac{a^2}{4}) = 0$

よって、$f(m)$ は $m > \dfrac{a^2}{4}$ で単調減少

$f(m) = 0$ を解くと

$\sqrt{m} = \dfrac{a \pm \sqrt{4b + a^2}}{2}$

$a > 0, b > 0$ より、

$\sqrt{m} = \dfrac{a + \sqrt{4b + a^2}}{2}$

$m = \left(\dfrac{a + \sqrt{4b + a^2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{2} + b + \dfrac{a\sqrt{4b + a^2}}{2}$

$\dfrac{a^2}{2}+b+\dfrac{a\sqrt{4b+a^2}}{2}>\dfrac{a^2}{4}$ はあきらかなので
$m>\dfrac{a^2}{2}+b+\dfrac{a\sqrt{4b+a^2}}{2}$ の範囲では、
$f(m)$ は単調減少なので
$f(m)<f(\dfrac{a^2}{2}+b+\dfrac{a\sqrt{4b+a^2}}{2})=0$ より
よって、$f(m)<0$
したがってこの範囲で
$\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}<1$ となる。
つまり、不等式は $4m<n^2<4m+1$ となるが、この間に整数は無い。
よって、これを満たす n は存在しない
つまり、任意の正数 a,b について、十分大きな数 m が存在し、不等式を成立させないことができる。
したがって、この不等式を満たす可能性のある m は有限しか無い。
そのそれぞれの m について、$\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}$ は有限の値で決まるので
$4m<n^2<4m+\frac{a}{\sqrt{m}}+\frac{b}{m}$ となる n は存在するとしても有限。
よって、(n,m) の組は有限個しかない。

1.
$a=8,\ b=9,\ m\geqq 9$ より、
$4m<n^2<4m+\frac{8}{\sqrt{m}}+\frac{9}{m}$ を満たす m,n を考える。
$m\geqq 9$ より
$\dfrac{9}{m}\leqq 1$
$\dfrac{8}{\sqrt{m}}\leqq\frac{8}{3}<3$
したがって、
この式を満たす n,m の組は、最低限
$4m<n^2<4m+4$ を満たす。
つまり、$n^2=4m+1,4m+2,4m+3$ のいずれかになる

n^2 が偶数と仮定すると
$n^2=4m+2$ しかなくて、
$4m+2=2(2m+1)$ となり、n^2 は偶数、n^2 が偶数ならば、n も偶数でなければならない。
よって、$n=2l$ とおくと、
$n^2=4l^2=2(2m+1)$
よって、$2l^2=2m+1$ となるが、左辺は偶数で右辺は奇数、したがってこの式はあり得ない。
よって、n^2 は奇数。

n^2 は奇数なので
n も奇数
これを、$2p+1$ とおくと $n^2=(2p+1)^2=4p^2+4p+1=4(p^2+p)+1$
したがって、n^2 は4で割ると1余る。
よって、n^2 は、$4m+1$ しかあり得ない。
したがってこの式を満たす、m,n の組は、$n^2=4m+1$ となる。

3.
$\dfrac{8}{\sqrt{m}}+\dfrac{9}{m}>1$ であることが必要

1. より

$\dfrac{8^2}{2} + 9 + \dfrac{8\sqrt{4 * 9 + 8^2}}{2} = 81$ から

$m > 81$ の範囲では、n は存在しないので、$m \leqq 81$

また、$n^2 = (2p+1)^2 = 4p(p+1) + 1 = 4m + 1$ より

$m = p(p+1)$ の形なので、81 以下でこの形になる最大の数は、$8 * 9 = 72$

以上より、

$$m = 72, n = 17$$