京都大学　1975 年　入学試験　文系数学　問題 1

問題

直角をはさむ 2 つの半直線 OA，OB 上にそれぞれ点 P，Q を，PQ $= 2a$（a は正の定数）であるようにとる．このとき，△OPQ の面積を最大にするには線分 OP の長さをいくらにすればよいか．

解答

$\overline{\mathrm{OP}} = l, \overline{\mathrm{OQ}} = m$ とおく。
△OPQ は直角をはさむ三角形なので
$l^2 + m^2 = 4a^2$
$l \geqq 0, m \geqq 0, a >$ なので、$0 \leqq l \leqq 2a$
$m \geqq 0$ より $m = \sqrt{4a^2 - l^2}$
△OPQ の面積は
$\dfrac{lm}{2}$ なので
$f(l) = \dfrac{l\sqrt{4a^2 - l^2}}{2}$ として
$f'(l) = -\dfrac{l^2 - 2a^2}{\sqrt{4a^2 - l^2}}$

$0 \leqq l \leqq 2a$ より $4a^2 - l^2 > 0$ なので $f'(l)$ の正負は $2a^2 - l^2$ の正負と一致する。
$(2a^2 - l^2) = (\sqrt{2}a + l)(\sqrt{2}a - l)$
$a > 0, l \geqq 0$ なので
$\sqrt{2}a + l > 0$
したがって、この正負は $\sqrt{2}a - l$ の正負と一致する。
つまり
$\sqrt{2}a - l > 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2}a > l$ の範囲で、正
$\sqrt{2}a - l < 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2}a < l$ の範囲で、負
$\sqrt{2}a = l$ の時 0 となる。
よって、$f(l)$ は、
$l < \sqrt{2}a$ で単調増加
$l = \sqrt{2}a$ で極大
$l > \sqrt{2}a$ で単調減少
となる。
よって、$0 \leqq l \leqq 2a$ の区間では、$l = \sqrt{2}a$ の点で最大となる。
以上より
△OPQ の面積を最大にするには、線分 OP の長さを $\sqrt{2}a$ とすればよい。