京都大学　1975 年　入学試験　文系数学　問題 3

問題

α, β, γ がこの順に等差数列であり，$\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ がこの順に等比数列であるのはどのようなときか.

解答

α, β, γ が等差数列であることから公差を d とおくと
$\beta = \alpha + d, \gamma = \alpha + 2d$
また、$\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ が等比数列であることから、公比を r とおくと
$\sin\beta = r\sin\alpha, \sin\gamma = r^2\sin\alpha$
となる。
これを合わせると
$\sin(\alpha + d) = r\sin\alpha, \sin(\alpha + 2d) = r^2\sin\alpha$
となる。
加法定理より
$\sin(\alpha + d) = \sin\alpha\cos\ d + \cos\alpha\sin\ d = r\sin\alpha$
$\sin(\alpha + 2d) = \sin\alpha\cos\ 2d + \cos\alpha\sin\ 2d = r^2\sin\alpha$
よって
$\cos\ d + \dfrac{\cos\alpha\sin\ d}{\sin\alpha} = r$
$\cos\ 2d + \dfrac{\cos\alpha\sin\ 2d}{\sin\alpha} = r^2$
$1 - 2sin^2 d + \dfrac{2\cos\alpha\sin\ d\cos\ d}{\sin\alpha} = r^2$
$\sin\alpha = a$
$\sin\ d = b$
$\cos\alpha = c$
$\cos\ d = f$
と書き換えると

$$f + \frac{cb}{a} = r \tag{1}$$
$$1 - 2b^2 + \frac{2cbf}{a} = r^2 \tag{2}$$

(1) を (2) に代入して
$b^2 + f^2 = 1$、$a^2 + c^2 = 1$ が成立するので

$$
\begin{aligned}
1-2b^2+\frac{2cbf}{a} &= \left(f+\frac{cb}{a}\right)^2 \\
1-2b^2+\frac{2cbf}{a} &= f^2+2f\frac{cb}{a}+\frac{c^2b^2}{a^2} \\
a^2-2a^2b^2+2abcf &= a^2f^2+2abcf+c^2b^2 \\
a^2-2a^2b^2-a^2f^2-c^2b^2 &= 0 \\
a^2-2a^2(1-f^2)-a^2f^2-c^2b^2 &= 0 \\
a^2-2a^2+2a^2f^2-a^2f^2-c^2b^2 &= 0 \\
a^2-2a^2+a^2f^2-c^2+c^2f^2) &= 0 \\
-a^2-c^2+f^2(a^2+c^2) &= 0 \\
-b^2(a^2+c^2) &= 0 \\
-b^2 &= 0
\end{aligned}
$$

したがって

$b=0$

$\sin\ d=0$

よって、$d=n\pi$

$\beta=\alpha+d=\alpha+n\pi$ $\gamma=\alpha+2d=\alpha+2n\pi$ よって

$\sin\beta=\sin(\alpha+n\pi)=\sin\alpha\cos\ n\pi+\cos\alpha\sin\ n\pi=(-1)^n\sin\alpha$

$\sin\gamma=\sin(\alpha+2n\pi)=\sin\alpha\cos\ 2n\pi+\cos\alpha\sin\ 2n\pi=\sin\alpha$

よって、$r=(-1)^n$

n が奇数の時は、$r=-1$

n が偶数の時は、$r=1$

つまり、

α,β,γ は、初項 α, 公差 $n\pi$ の等差数列

$\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma$ は初項 $\sin\alpha$, 公比 ±1 の等比数列

となる。