京都大学　1975 年　入学試験　文系数学　問題 5

問題

n と a_1, a_2, $\cdots$, a_n は自然数であって，不等式

$$2 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n, \quad \sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)-2>0$$

をみたすものとする．$S=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{a_i}\right)-2$ とおく．

1. とくに $n=3$ として，S を最小にする (a_1, a_2, a_3) を求めよ．
2. n も自由に動かした可能なすべての組 $(n, a_1, a_2, \cdots, a_n)$ のうちで，S を最小にするものを求めよ．

解答

1.
$n=3$ より $2 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$
$a_1=b$
$a_2=b+c$
$a_3=b+d$
としたとき

$$\begin{aligned} S &= 1-\frac{1}{b}+1-\frac{1}{b+c}+1-\frac{1}{b+d}-2 \\ &= 1-\frac{1}{b}-\frac{1}{b+c}-\frac{1}{b+d} \end{aligned}$$

ここで、
$f(x)=1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+c}-\dfrac{1}{x+d}$ とおいて
x について微分すると
$f'(x)=\dfrac{1}{(x+c)^2}+\dfrac{1}{(x+d)^2}+\dfrac{1}{x^2}$
いま、b, c, d はすべて正なので
$f'(x)>0$
よって、$f(x)$ は単調減少。したがって、$f(x)$ は任意の c, d について $b=2$ において、最小となる。よって、
$f(x)$ の最小値は、常に $f(2)=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2+c}-\dfrac{1}{2+d}$
次に
$g(x)=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2+d}$ を考えると
これを微分すると
$g'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$
これは上記と同様常に正なので $g(x)$ は単調増加
したがって、任意の d について、$g(x)$ は $x=0$ において最小となる。
よって $g(x)$ の最小値は、$g(0)=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2+d}=-\dfrac{1}{2+d}$
しかし、この値では $S>0$ が成り立たないので、$x \geqq 1$
よって、$g(1)=1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2+d}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2+d}$

次に $h(x)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2+x}$
とおくと
$h'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$
となり、$g(x)$ と同様、$h(5)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{42}$
のとき最小となる。
つまり、$(a_1,a_2,a_3)=(2,3,7)$
2.
$k \geqq 5$ の時を考える。
S_k を $n=k$ の時の S とする。
また、$n=k$ の時の S_k の最小値を M_k とする。
$n=k$ のとき、$a_1=a_2=\cdots=a_{k-1}=a_k=2$ の時最小になると仮定すると
$a_1=d_1$
$a_2=d_1+d_2$
$\vdots$
$a_n=d_1+d_2+\cdots+d_n$
$d_1 \geqq 2, d_1 \dots d_n \geqq 0$
とすると $n=k+1$ のときの S は

$$
\begin{aligned}
S = {} & 1-\frac{1}{d_1}+1-\frac{1}{d_1+d_2}+1-\frac{1}{d_1+d_2+d_3} \\
& \cdots \\
& +1-\frac{1}{d_1+d_2+\cdots+d_{k+1}}-2
\end{aligned}
$$

となり、
$f(x)=1-\dfrac{1}{d_1}+1-\dfrac{1}{d_1+d_2}+1-\dfrac{1}{d_1+d_2+d_3}+\cdots+1-\dfrac{1}{d_1+d_2+\cdots+d_k}+1-\dfrac{1}{d_1+d_2+\cdots+x}-2$
とすると、$f'(x)=\dfrac{1}{(d_1+d_2+\cdots+x)^2}$
となり、$f(x)$ は単調増加。
したがって、$f(x)$ は $f(0)$ において最小となる。
そのときの最小値は
$M_{k+1}=f(x)=1-\dfrac{1}{d_1}+1-\dfrac{1}{d_1+d_2}+1-\dfrac{1}{d_1+d_2+d_3}+\cdots+1-\dfrac{1}{d_1+d_2+\cdots+d_k}+1-\dfrac{1}{d_1+d_2+\cdots+d_k}-2$
$S_k=1-\dfrac{1}{d_1}+1-\dfrac{1}{d_1+d_2}+1-\dfrac{1}{d_1+d_2+d_3}+\cdots+1-\dfrac{1}{d_1+d_2+\cdots+d_k}-2$
なので
$M_{k+1}=S_k+1-\dfrac{1}{d_1+d_2+\cdots+d_k}=S_k+1-\dfrac{1}{a_k}$
つまり
S_{k+1} は、S_k の値にかかわらず $a_k=a_{k+1}$ のとき最小となる。
S_k が $a_1=a_2=\cdots=a_k=2$ のとき最小となるので、
S_{k+1} は、$a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}=2$ のとき最小となる、
$n=5$ の時

$$
\begin{aligned}
S_5 &= 1-\frac{1}{d_1}+1-\frac{1}{d_1+d_2}+1-\frac{1}{d_1+d_2+d_3}+1-\frac{1}{d_1+d_2+d_3+d_4}+1-\frac{1}{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5}-2 \\
&= 3-\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d_1+d_2}-\frac{1}{d_1+d_2+d_3}-\frac{1}{d_1+d_2+d_3+d_4}-\frac{1}{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5}
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{d_1} \leqq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{d_1+d_2} \leqq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{d_1+d_2+d_3} \leqq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{d_1+d_2+d_3+d_4} \leqq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5} \leqq \frac{1}{2}$$

より
$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_1+d_2}+\frac{1}{d_1+d_2+d_3}+\frac{1}{d_1+d_2+d_3+d_4}+\frac{1}{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5} \leqq \frac{5}{2}$
よって、$S_5 > 0$

したがって、上記 $n=k$ の時と同様にして、$d_5 = 0$ の時最小となり、かつ $S_5 > 0$

1. と同様に考えて、

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 2, 2, 2, 2)$

のとき最小となって、最小値は $S_5 = \frac{1}{2}$

よって $n = 5$ のときは示されたので数学的帰納法より $n \geqq 5$ のすべての n において成立する。

したがって、5 以上の k については、

$$M_k = \frac{n}{2} - 2$$

がなりたつ。

$S_1 = 1 - \frac{1}{a_1} - 2 = \frac{1}{a_1} - 1 < 0$
$S_2 = 1 - \frac{1}{a_1} + 1 - \frac{1}{a_2} - 2 = -\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} < 0$
より、$n > 2$ でなければ、成立しないので、S_3, S_4, S_5 を考えると
M_3 は 1. のとき
$(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 7) \to S_3 = \frac{1}{42}$
M_4 は 1. と同様に考えて
$(a_1, a_2, a_3, a_4) = (2, 2, 2, 3) \to S_4 = \frac{1}{6}$
M_5 以上については、上記より $M_n = \frac{n}{2} - 2$ なので
$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 2, 2, 2, 2) = \frac{1}{2}$
$\frac{n}{2} - 2$ は単調増加なので、最小となるのは、$n = 5$ のとき
よって、すべての組合せにおいて、最小となるのは $M_3 = \frac{1}{42}$
つまり、最小となる組合せと S の最小値は

$$(a_1, a_2, a_3) = (2, 3, 7), S = \frac{1}{42}$$