京都大学　1975 年　入学試験　文系数学　問題 6

問題

a が実数で $a<1$ のとき，数列 x_0，x_1，x_2，$\cdots$，x_n，$\cdots$ を $x_0=a$，$x_n=\dfrac{1}{2-x_{n-1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定義する．
このとき

1. x_n を n と a で表わせ．
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(x_n-1+\frac{1}{n}\right)$ を求めよ．

解答

1.
計算してみる。
$x_1=\dfrac{1}{2-a}$
$x_2=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-a}}=\dfrac{2-a}{3-2a}$
$x_3=\dfrac{1}{2-\dfrac{2-a}{3-2a}}=\dfrac{3-2a}{4-3a}$
$x_4=\dfrac{1}{2-\dfrac{3-2a}{4-3a}}=\dfrac{4-3a}{2(4-3a)-(3-2a)}=\dfrac{4-3a}{5-4a}$
以上より $x_n=\dfrac{n-(n-1)a}{n+1-na}$ と考えられる。
x_n をこのように定義してみると、

$$\begin{aligned}
x_n(2-x_{n-1}) &= \frac{n-(n-1)a}{n+1-na}(2-\frac{n-1-(n-2)a}{n-(n-1)a}) \\
&= \frac{n-(n-1)a}{n+1-na}\frac{2(n-(n-1)a)-(n-1-(n-2)a)}{n-(n-1)a} \\
&= \frac{2(n-(n-1)a)-(n-1-(n-2)a)}{n+1-na} \\
&= \frac{2n-2(n-1)a-n+1+(n-2)a}{n+1-na} \\
&= \frac{2n-2na+2a-n+1+an-2a}{n+1-na} \\
&= \frac{2n-n+1-na}{n+1-na} \\
&= \frac{n+1-na}{n+1-na} \\
&= 1
\end{aligned}$$

から
$x_n(2-x_{n-1})=1$
したがって、

$$x_n=\frac{1}{2-x_{n-1}}$$

となり漸化式が成立する。
一つの漸化式によって定められる数列は一つなので

$x_n = \dfrac{n-(n-1)a}{n+1-na}$ である。

2.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2\left(x_n - 1 + \frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{n-(n-1)a}{n+1-na} - 1 + \frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{-an+n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{-an+n+1}
\end{aligned}$$

$f(n) = \dfrac{-an+n+1}{n}$ をとる。

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{-an+n+1}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty} -a+1+\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} -a+1 = 1-a$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

となり、それぞれ有限な値に収束するので

$\lim_{n\to\infty} -a+1+\dfrac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} -a+1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 1-a$

$a < 1$ なので

$1-a > 0$ であり

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{f(x)}$

において分母は0にならないので、これも収束し

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{1-a}$

となる。

以上より求める極限は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{-an+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1-a}$$