京都大学　1975 年　入学試験　理系数学　問題 2

問題

1. $x \geqq 0$ のとき $\sqrt{x} \leqq \dfrac{1}{2}(x+1)$ を示せ.
2. $\displaystyle\int_0^k \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx < 1$ を示せ（k は自然数).

解答

1.
相加平均 $\geqq$ 相乗平均
より
$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$
$x \geqq 0$ なので
$a=1, b=x$ とおくと
$\dfrac{1+x}{2} \geqq \sqrt{x}$
となり、
題意は成立する。
2.
$S_k = \displaystyle\int_0^k \sqrt{x}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx < 1$
$S_k \leqq \displaystyle\int_0^k \frac{x+1}{2}\left(1-\frac{x}{k}\right)^k dx$
$T_k = \displaystyle\int_0^k (x+1)(k-x)^k\, dx$ とおく

$\displaystyle\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$
$f(x) = (x+1)$
$g'(x) = (k-x)^k$
$f'(x) = 1;\ g(x) = -\dfrac{(k-x)^{k+1}}{k+1}$

$$
\begin{aligned}
T_k &= \int_0^k (x+1)(k-x)^k \, dx \\
&= \left[-\frac{(x+1)(k-x)^{k+1}}{k+1} \right]_0^k - \int_0^k -\frac{(k-x)^{k+1}}{k+1} \, dx \\
&= -\frac{(k+1)(k-k)^{k+1}}{k+1} + \frac{(0+1)(k-0)^{k+1}}{k+1} + \int_0^k \frac{(k-x)^{k+1}}{k+1} \, dx \\
&= \frac{k^{k+1}}{k+1} + \int_0^k \frac{(k-x)^{k+1}}{k+1} \, dx \\
&= \frac{k^{k+1}}{k+1} + \left[-\frac{(k-x)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \right]_0^k \\
&= \frac{k^{k+1}}{k+1} + -\frac{(k-k)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \frac{(k-0)^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^{k+1}}{k+1} + \frac{k^{k+2}}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^{k+1}}{k+1} \left(1 + \frac{k}{(k+2)} \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2k^k} T_k &= \frac{1}{2k^k} \frac{k^{k+1}}{k+1} \left(1 + \frac{k}{(k+2)} \right) \\
&= \frac{k}{2(k+1)} \left(1 + \frac{k}{(k+2)} \right) \\
&= \frac{k(2k+2)}{2(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+2}
\end{aligned}
$$

以上より

$$
S_k < \frac{k}{k+2} < 1
$$

よって題意は成立する。