京都大学　1975 年　入学試験　理系数学　問題 3

問題

α, β, γ がこの順に等差数列であり，$\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ がこの順に等比数列であるのはどのようなときか.

解答

α, β, γ が等差数列であることから公差を d とおくと
$\alpha = \beta - d, \gamma = \beta + d$
また、$\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ が等比数列であることから
$\sin^2\beta = \sin\alpha\sin\gamma$
となる。
これを合わせると
$\sin^2\beta = \sin(\beta - d)\sin(\beta + d)$
となる。
加法定理より

$$\begin{aligned}\sin(\beta - d)\sin(\beta + d) &= (\sin\beta\cos d - \cos\beta\sin d)(\sin\beta\cos d + \cos\beta\sin d)\\ &= \sin^2\beta\cos^2 d - \cos^2\beta\sin^2 d\end{aligned}$$

なので
$\sin^2\beta = \sin^2\beta\cos^2 d - \cos^2\beta\sin^2 d$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ に注意して、移項して整理すると

$$\begin{aligned}\sin^2\beta(1 - \cos^2 d) + \cos^2\beta\sin^2 d &= 0\\ \sin^2\beta\sin^2 d + cos^2\beta\sin^2 d &= 0\\ (\sin^2\beta + \cos^2\beta)\sin^2 d &= 0\\ \sin^2 d &= 0\end{aligned}$$

となり
$\sin d = 0$
よって、n を整数として
$d = n\pi$
$\beta = \alpha + d = \alpha + n\pi$
$\gamma = \alpha + 2d = \alpha + 2n\pi$
なので
$\sin\beta = \sin(\alpha + n\pi) = \sin\alpha\cos\ n\pi + \cos\alpha\sin\ n\pi = (-1)^n\sin\alpha$
$\sin\gamma = \sin(\alpha + 2n\pi) = \sin\alpha\cos\ 2n\pi + \cos\alpha\sin\ 2n\pi = \sin\alpha$
よって、公比 $r = (-1)^n$
n が奇数の時は、$r = -1$
n が偶数の時は、$r = 1$
以上より α, β, γ は、初項 α, 公差 $n\pi$ の等差数列
$\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma$ は初項 $\sin\alpha$, 公比 ±1 の等比数列となる。

謝辞：この解答は今田さんに教えていただきました。ありがとうございました。