京都大学　1975 年　入学試験　理系数学　問題 4

問題

平面上で，3 つの定点 A，B，C と定円の周上を動く点 P がある．ベクトル $\vec{\mathrm{PA}}+\vec{\mathrm{PB}}+\vec{\mathrm{PC}}$ の大きさが最大となるのは点 P がどんな位置にあるときか．

解答

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ の大きさを l とする。
$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{3}$ を P からのベクトルとしたとき、この終点を G とすると、点 G は P の位置にかかわらず一定。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PG}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{3}\\
&= \frac{\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GP}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}-\overrightarrow{\mathrm{GP}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}-\overrightarrow{\mathrm{GP}}}{3}\\
&= \frac{\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}}{3}-\overrightarrow{\mathrm{GP}}\\
&= \frac{\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}}{3}+\overrightarrow{\mathrm{PG}}
\end{aligned}$$

つまり、
$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}}{3}=0$
より
$\dfrac{-\overrightarrow{\mathrm{AG}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AG}}}{3}=0$
$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}$
よって、G は、P に関係なく一定
したがって、
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=3\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ なので
$l=3|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$
より
l が最大になるのは、$\overrightarrow{\mathrm{GP}}$ が最大になるとき
点 P の中心を点 O としたとき G≠O の時は直線 GO とその円周の交点で、点 G と反対側にある点。
点 G が点 O と一致する場合は、l の大きさは常に一定なので、最大となる点は存在しない。

点 G は ABC の重心なので、
問題のベクトルが最大となる点 P は、
三点 ABC の重心を G、定円の中心を O としたとき、直線 OG と円周の交点で、点 O を挟んで点 G と反対側の点
G と O が一致するときは、任意の点 P においてベクトルの長さは一定、つまり常に最大と言ってもいいが、常に最小でもある。