京都大学　1975年　入学試験　理系数学　問題6

問題

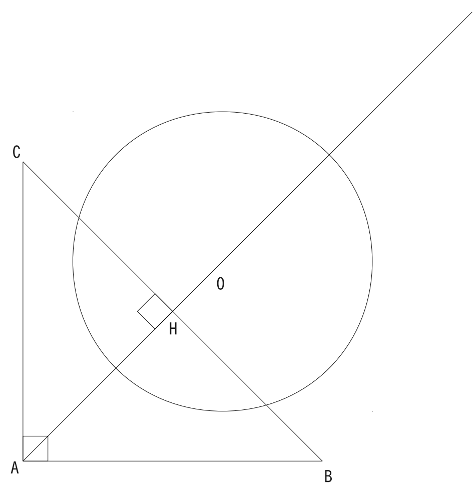
$\triangle$ABCで $\angle A = 90^\circ$，$\overline{AB} = \overline{AC} = 2$ とする．頂点Aから斜辺BCに垂線AHをひく（Hはその交点）．半直線AH上に中心Oをもつ半径1の円を考える．

1. $\triangle$ABCの3つの辺が円Oの周とそれぞれ2点で交わるのは，$\overline{AO} = x$ がどのような範囲にあるときか．
2. $\triangle$ABCと円Oの内部の共通部分の面積を S とする．x が (1) の範囲にあるとき，S をつぎの関数 $F(t)$ を用いて表わせ．

$$F(t) = 2\int_t^1 \sqrt{1-u^2}\,du \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

3. x は (1) の範囲にあるとする．$\dfrac{dS}{dx}$ を求め，S を最大にする x の値を求めよ．

解答



1. AHはBCへの垂線で、円の中心OがAH上にあるので、HとOの距離が半径より大きい時円はBCと交点を持たない。
   また、HとOの距離が半径に等しい時は、Hで接するので、２点で交わらない。
   したがって、２点で交わるためには、HとOの距離が円の半径未満であることが必要。
   また、線分BCは $2\sqrt{2}$ の長さがあり中点の垂線上を中心が移動するのでBCと円の交点がBCの外側にでることはない、よって十分
   $\triangle$ABCはAを直角とする直角二等辺三角形なので、AHはBCの中点で、AHの距離は $\sqrt{2}$
   以上よりAOを x で表すので、この条件は、$|\sqrt{2} - x| < 1$ となり、

$$-1 + \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$$

   円とABについても同様に、OからABに垂線をおろし、その交点をJとすると、OからJの距離が半径未満であればよい。
   OJの距離は $\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ で表せるのでこの条件は $\dfrac{x}{\sqrt{2}} < 1$ つまり $x < \sqrt{2}$ となる。
   しかし、$x < 1$ の場合ABとの交点がABの範囲から出てしまうので、$x \geq 1$ が必要

円と AC との関係については AH に対して対称なので、条件は同じ。

$$1 \leq x < \sqrt{2}$$

以上の条件をあわせて $\sqrt{2}-1 < 1$,$1+\sqrt{2} > \sqrt{2}$ なので、

$$1 \leq x < \sqrt{2}$$

2. $F(t)$ は原点を中心とした半径 1 の円の $t < x < 1$ の範囲の面積を表す
S は半径 1 の円から AB,BC,AC の 3 辺の外側の面積を引いたものなので、
BC によって切られた外側の面積は OH の距離を t としたときの $F(t)$ の値となり、AB によって切られた外側の面積は OJ の距離を t とした時の $F(t)$ の値となる。OH のは距離 $\sqrt{2}-x$,OJ の距離は $\frac{x}{\sqrt{2}}$、半径 1 の円の面積は π なので

$$S = \pi - (F(\sqrt{2}-x) + 2F(\frac{x}{\sqrt{2}}))$$

3. $F(t)$ を置き換えて、微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dx} &= \frac{d}{dx}(\pi - (2\int_{\sqrt{2}-x}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du + 4\int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du)) \\ &= \frac{d}{dx}\pi - 2\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{2}-x}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du - 4\frac{d}{dx}\int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du \\ &= -2\sqrt{1-(\sqrt{2}-x)^2} + 2\sqrt{2}\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}\end{aligned}$$

となる。x が 1 から $\sqrt{2}$ まで変化すると、$\sqrt{2}-x$ は減少し $1-(\sqrt{2}-x)^2$ は増加する。したがって $-2\sqrt{1-(\sqrt{2}-x)^2}$ は減少する。
同様に $(\frac{x}{\sqrt{2}})^2$ は増加し $2\sqrt{2}\sqrt{1-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}$ は減少する。
したがって、$\frac{dS}{dx}$ は短調減少となる。
$x=1$ のとき $\frac{dS}{dx} = -2\sqrt{2\sqrt{2}-2}+2 < 0$ なので、$1 \leq x < \sqrt{2}$ の区間で $\frac{dS}{dx}$ は負となり S は短調減少。
したがって $x=1$ の時 S の最大となる。
よって S を最大とする x は

$$x = 1$$