京都大学　1976 年　入学試験　文系数学　問題 4

問題

1. 点 (x, y) が直線 $y = ax$ の上を動くとき，点 $(2x - y, x - 2y)$ は原点を通る 1 つの直線 l の上を動くことを示せ.
2. (1) における 2 つの直線 $y = ax$ と l とが一致するような a の値は 2 つあることを示し，そのような a の値を a_1，a_2 とするとき，2 つの直線 $y = a_1 x$ と $y = a_2 x$ との間の角を求めよ.

解答

1.
$y = ax$ なので $(2x - y, x - 2y)$ に代入すると $(2x - ax, x - 2ax) = ((2 - a)x, (1 - 2a)x)$ これは、$a \neq 2$ の時
$y = \dfrac{1 - 2a}{2 - a}x$ の直線動く点 $a = 2$ のときは
$x = 0$ の直線つまり、y 軸に一致する直線となる。
どちらにしても $x = 0$ のとき、$y = 0$ を通るので、原点を通る。

2.
$a \neq 2$ の場合
$y = \dfrac{1 - 2a}{2 - a}x$ と $y = ax$ が一致するためには $\dfrac{1 - 2a}{2 - a} = a$ であることが必要。
$-a^2 + 4a - 1 = 0$ より $a = 2 \pm \sqrt{3}$
よって a は二つある。
このとき、$a_1 = 2 + \sqrt{3}, a_2 = 2 - \sqrt{3}$ とすると
$y = (2 + \sqrt{3})x$ と $y = (2 - \sqrt{3})$ となる。
$y = (2 + \sqrt{3})x$ が x 軸となす角 θ_1 は、$\tan\theta_1 = 2 + \sqrt{3}$ となり
$y = (2 - \sqrt{3})x$ が x 軸となす角 θ_2 は、$\tan\theta_2 = 2 - \sqrt{3}$ となる。
したがってこの 2 つの直線のなす角 θ は
$\theta_1 - \theta_2$ となるので

$$\begin{aligned}\tan(\theta_1 - \theta_2) &= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3} - (2 - \sqrt{3})}{1 + (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

$\tan\theta = \sqrt{3}$ より
$\theta = \dfrac{\pi}{3} + n\pi$
となるが、直線のなす角なので、π の整数倍は無視して構わない
よって、$\dfrac{\pi}{3}$

$a = 2$ の場合
$(2 - a)y = (1 - 2a)x$ が $y = ax$ とは一致しない。

よって、l と $y = ax$ が一致する場合の時
２直線のなす角は

$$\frac{\pi}{3}$$